MATEMATICĂ

Formule utile pentru elevii claselor V-VIII

Algebră

Mulțimea numerelor naturale N

N= $\{0,1,2,3,4,5,...\}$ și N* = $\{1,2,3,4,5,...\}$

Operații cu numere naturale

Adunarea. Dacă $a, b \in \mathbf{N}$, atunci $a + b = c \in \mathbf{N}$.

<u>Proprietățile adunării</u>

- Comutativitatea: $a + b = b + a$, $(\forall)a, b \in \mathbf{N}$;
- Asociativitatea: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(\forall)a, b, c \in \mathbf{N}$;
- Elementul neutru: $a + 0 = 0 + a = a$, $(\forall)a \in \mathbf{N}$.

Scăderea. $a - b = c$, dacă și numai dacă $a = b + c$.

Înmulțirea. Dacă $a, b \in \mathbf{N}$, atunci $a \cdot b = c \in \mathbf{N}$.

<u>Proprietățile înmulțirii</u>

- Comutativitatea: $a \cdot b = b \cdot a$, $(\forall)a, b \in \mathbf{N}$;
- Asociativitatea: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $(\forall)a, b, c \in \mathbf{N}$;
- Numărul 1 este element neutru față de înmulțire: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $(\forall)a \in \mathbf{N}$;
- Distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere: $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$, $(\forall)a, b, c \in \mathbf{N}$.

Puteri, operații cu puteri

Definim: $\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{n factori}}$

1. $a^0 = 1$, $(\forall)a \in N^*$;
2. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(\forall)m, n \in N$, $a \in N^*$;
3. $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(\forall)m, n \in N$, $a \in N^*$, $m \geq n$;
4. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $(\forall)m, n \in N$, $a \in N^*$;
5. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $(\forall)m \in N$, $a, b \in N^*$;
6. $(a : b)^m = a^m : b^m$, $(\forall)m \in N$, $a, b \in N^*$;

Împărțirea, $a : b = c$, $a = b \cdot c$.

<u>Proprietăți ale relației de divizibilitate în N</u>

- $a \vdots a$ pentru orice a - *reflexivitatea*;
- Dacă $a \vdots b$ și $b \vdots a$, atunci $a = b$ - *antisimetria*;

- Dacă $a \vdots b$ şi $b \vdots c$, atunci $a \vdots c$ - *tranzitivitatea*;
- Orice număr natural este divizibil cu 1; scriem $a \vdots 1, (\forall) a \in N$;
- Zero este divizibil cu orice număr natural; scriem $0 \vdots a$;
- Dacă $a \vdots b$ şi $c \vdots b$, atunci $(a \pm c) \vdots b$;
- Dacă $a \vdots b$ atunci $(a \cdot c) \vdots b, (\forall) c \in N$;
- Dacă $a \vdots b$; $a \vdots c$ unde b şi c sunt prime între ele, atunci $a \vdots (b \cdot c)$.

Proprietate

$(a,b) \cdot [a,b] = a \cdot b$.

Mulţimea numerelor întregi

$Z = \{\ldots,-n,\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$;

$Z^* = Z \setminus \{0\}$.

Numărul divizorilor naturali ai unui număr natural

$N = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_p^{\alpha_p}$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sunt numere prime, este dat de formula $n = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_p + 1)$.

Observaţie: Numărul divizorilor întregi ai numărului întreg.
$N = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_p^{\alpha_p}$ (unde $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sunt numere prime) este: $n = 2 \cdot (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_p + 1)$.

Modulul unui număr întreg

$$|a| \overset{def}{=} \begin{cases} a, & daca\ a > 0 \\ 0, & daca\ a = 0 \\ -a, & daca\ a < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |a| \overset{def}{=} \begin{cases} a, & daca\ a \geq 0 \\ -a, & daca\ a < 0 \end{cases}$$

Proprietăţi

- $|a| \geq 0, (\forall) a \in Z$;
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, (\forall) a, b \in Z$;
- $|a| = |-a|, (\forall) a \in Z$;
- $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|, (\forall) a, b \in Z$;
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, (\forall) a, b \in Z$;
- $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a, (a > 0)$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, (a > 0)$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ sau $x \geq a, (a > 0)$

Proprietățile adunării

- *Asociativitatea*: $(a+b)+c=a+(b+c)$;
- *Comutativitatea*: $a+b=b+a$;
- *Element neutru*: $a+0=0+a=a$.

Proprietățile înmulțirii

- *Asociativitatea*: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$;
- *Comutativitatea*: $a\cdot b=b\cdot a$;
- *Distributivitatea față de adunare și scădere*: $a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c$;
- *Element neutru*: $a\cdot 1=1\cdot a=a$.
- $a\cdot(-1)=-a$; $(-a)\cdot(-1)=-(-a)=a$.

Dacă $\frac{a}{b}>1$, fracția se numește supraunitară și avem $a>b$.

Dacă $\frac{a}{b}=1$, fracția se numește echiunitară și avem $a=b$.

Dacă $\frac{a}{b}<1$, fracția se numește subunitară și avem $a<b$.

O fracție $\frac{a}{b}$ pentru care $(a,b)=1$ se numește ireductibilă.

Adunarea fracțiilor

Dacă fracțiile au același numitor, avem: $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$.

Dacă fracțiile nu au același numitor, avem: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$.

Proprietățile adunării

- Comutativitatea: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$;
- Asociativitatea: $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$;
- Numărul rațional 0 este element neutru pentru adunare: $\frac{a}{b}+0=0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$, oricare ar fi $\frac{a}{b}\in Q$.

Scăderea fracțiilor

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)$$

Înmulțirea fracțiilor

Pentru a înmulţi două sau mai multe fracţii, înmulţim numărătorii între ei şi numitorii între ei şi scriem: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Proprietăţile înmulţirii

- Comutativitatea: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$;
- Asociativitatea: $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$;
- Numărul raţional 1 este element neutru pentru înmulţire: $\frac{a}{b}\cdot 1=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$, oricare ar fi $\frac{a}{b}\in Q$;
- Înmulţirea este distributivă faţă de adunare şi scădere: $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\pm\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\pm\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$.

Inversul unui număr nenul

Spunem că inversul unui număr a nenul este numărul b, dacă şi numai dacă $a\cdot b=1$. Inversul unui număr a se notează $\frac{1}{a}$.

Împărţirea fracţiilor

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

Puterea unei fracţii

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

$N\subset Z\subset Q\subset R$.

Intervale de numere reale

Fiind date două numere reale a şi b cu $a<b$, următoarele mulţimi le numim intervale:

$\{x \mid x\in R\ si\ a<x<b\}=(a,b)$, numit interval deschis;
$\{x \mid x\in R\ si\ a\le x\le b\}=[a,b]$, numit interval închis;
$\{x \mid x\in R\ si\ a<x\le b\}=(a,b]$, numit interval deschis la stânga si închis la dreapta;
$\{x \mid x\in R\ si\ a\le x<b\}=[a,b)$, numit interval închis la stânga şi deschis la dreapta;
$\{x \mid x\in R\ si\ a<x\}=(a,+\infty)$, numit interval deschis la stânga şi nemărginit la dreapta;
$\{x \mid x\in R\ si\ x<a\}=(-\infty,a)$, numit interval nemărginit la stânga şi deschis la dreapta;
$\{x \mid x\in R\ si\ a\le x\}=[a,+\infty)$, numit interval închis la stânga şi nemărginit la dreapta;

$\{x \mid x \in R \; si \; x \leq a\} = (-\infty, a]$, numit interval nemărginit la stânga şi închis la dreapta.

Radicali

Definim: $\sqrt{a} = b, \quad b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b^2$.

1. $\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \in R$;
2. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a, b \geq 0$;
3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b > 0$;
4. $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, \quad a, b \geq 0$;
5. $\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}, \quad a \neq 0$;
6. $\frac{c}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{c\left(a \mp \sqrt{b}\right)}{a^2 - b}, \quad b \neq a^2$;
7. $\frac{m}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{m\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)}{a - b}, \quad a \neq b$;
8. $\max(a,b) = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases}$, $\min(a,b) = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$;
9. $\max(a,b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$, $\min(a,b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$;

Modulul unui număr real

$|x| = \begin{cases} x, & daca \quad x \in [0, \infty) \\ -x, & daca \quad a \in (-\infty, 0] \end{cases}$

1. $|x| \geq 0$, $(\forall) x \in R$;
2. $|x| = 0$, dacă şi numai dacă $x = 0$;
3. $|-x| = |x|$, $(\forall) x \in R$;
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $(\forall) x, y \in R$;
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $(\forall) x \in R, y \in R^*$;
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$, $(\forall) x, y \in R$;
7. $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$, cu $a \geq 0$;
8. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, cu $a \geq 0$.

Media aritmetică a n numere reale $a_1, a_2, ..., a_n$ este:

$$M_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Media aritmetică ponderată a n numere reale $a_1, a_2, ..., a_n$ cu ponderile $p_1, p_2, ..., p_n$ este:

$$M_{ap} = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

Media geometrică (proporțională) a două numere reale pozitive este: $M_g = \sqrt{a \cdot b}$.

Media armonică a două numere reale nenule este:

$$M_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Inegalitatea mediilor

Oricare ar fi $a > 0$, $b > 0 \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, adică $\left(M_h \le M_g \le M_a\right)$.

Dintr-o proporție putem obține noi proporții, numite ***proporții derivate***:

1) schimbând mezii între ei: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$;

2) schimbând extremii între ei: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$;

3) inversând ambele rapoarte: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$;

4) schimbând ordinea rapoartelor: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$;

5) amplificând (sau simplificând) unul din rapoarte;

6) înmulțind (sau împărțind) ambii numărători (sau ambii numitori) cu un număr nenul;

7) adunând sau scăzând la numărători numitorii: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$;

8) adunând sau scăzând la numitori numărătorii: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}$;

9) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$.

<u>Aflarea unui termen necunoscut al unei proporții:</u>

Din $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ avem:

$$a = \frac{b \cdot c}{d}; \quad d = \frac{b \cdot c}{a}; \quad b = \frac{a \cdot d}{c}; \quad c = \frac{a \cdot d}{b}.$$

Dacă numerele $x, y, z, ...$ sunt direct proporționale cu numerele $a, b, c, ...$ scriem: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = ... = \frac{x + y + z + ...}{a + b + c + ...}$.

Dacă numerele $x, y, z,...$ sunt invers proporționale cu numerele $a, b, c,...$ scriem $\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{z}{\frac{1}{c}}=...=\frac{x+y+z+...}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+...}$ sau $x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c = ...$

<u>Produsul unui număr cu o sumă algebrică</u>

$$x(a+b+c-d+...)=xa+xb+xc-xd+...$$

Produsul dintre două sume:

$$(x+y-z)(a-b+c)=xa-xb+xc+ya-yb+yc-za+zb-zc$$

Formule de calcul prescurtat

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (pătratul binomului sumă);

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (pătratul binomului diferență);

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Alte formule de calcul prescurtat*

1. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
2. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
3. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
4. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

1. $a^2+b^2 \geq 2ab$, $(\forall)a,b \in R$;
2. $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $(\forall)a,b \in R_+$ (inegalitatea mediilor $m_a \geq m_g$);
3. $a+\frac{1}{a} \geq 2$, $(\forall)a \in (0,+\infty)$;
4. $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$, $(\forall)a,b,c \in R$.

Propoziția $ax+b=0$, $a,b,x \in R$, $a \neq 0$ se numește ecuație de gradul I cu o necunoscută.

Numărul $-\frac{b}{a}$ se numește soluție a ecuației date și scriem $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

<u>Ecuația de gradul II cu o necunoscută</u>

Propoziția $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c,x \in R$, $a \neq 0$ se numește ecuație de gradul al II-lea cu necunoscuta x.

<u>Etapele rezolvării ecuației de gradul II cu o necunoscută</u>

1. $\Delta = b^2-4ac$.
2. Dacă $\Delta < 0$, radicalul nu are sens și ecuația nu are soluții reale.

Dacă $\Delta \geq 0$ ecuația are soluțiile: $x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Propozițiile de forma: $ax+b<0$; $ax+b\le 0$; $ax+b>0$; $ax+b\ge 0$, unde $a,b,x\in R$ cu $a\neq 0$, se numesc ***inecuații de gradul I cu necunoscuta x***.

Soluțiile inecuațiilor sunt intervalele:

$$ax+b\ge 0 \Rightarrow 1)\ x\in\left[-\frac{b}{a},\infty\right),\quad daca\ a>0;$$

$$2)\ x\in\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right],\quad daca\ a<0;$$

$$ax+b\le 0 \Rightarrow 1)\ x\in\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right],\quad daca\ a>0;$$

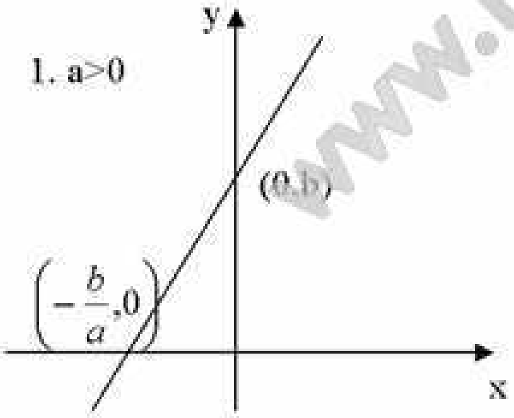
$$2)\ x\in\left[-\frac{b}{a},\infty\right),\quad daca\ a<0;$$

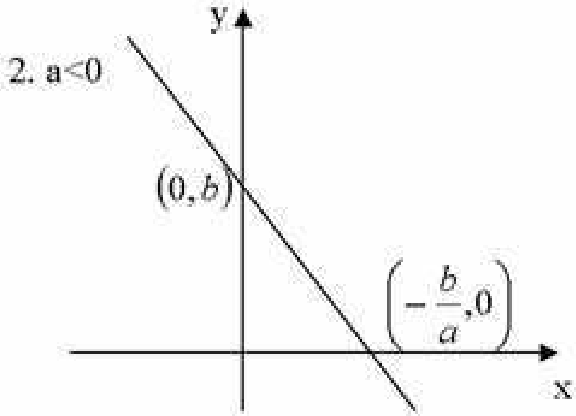
Două ecuații de gradul I cu două necunoscute formează un ***sistem de ecuații de gradul I cu două necunoscute***:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Mulțimea tuturor perechilor de numere de forma $(x,f(x))$ cu $x\in A$ și $f(x)\in B$ se numește graficul funcției *f* și se notează G_f deci:

<u>Graficul unei funcții</u> $f:R\to R$, $f(x)=ax+b$





<u>Semnul unei funcții liniare</u>

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	semn contrar semnului lui a	0	Semnul lui a