GEOMETRIE

1. Probleme de numărare

Rezumat: În cadrul temei se vor prezenta elementele de bază ale combinatoricii, regula sumei, produsului, precum şi aplicarea lor în diferite probleme de algebră, aritmetică, respectiv geometrie combinatorică (probleme de numărare, colorare, descompunere).

1.1 Reprezentarea regulei sumei, respectiv produsului, şi aplicaţii ale acestor reguli în studierea unor probleme de combinatorică, respectiv a unor probleme de numărare

1.1.1. Regula sumei

Dacă un anumit obiect poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect poate fi ales în n moduri , atunci alegerea "lui A sau B" poate fi realizată în m+n moduri (trebuie avut grijă ca nici o alegere a lui A să nu coincidă cu nici o alegere a lui B).Dacă totuşi exista astfel de coincidențe, atunci regula sumei de mai sus dă m+n-k moduri de alegere " a lui A sau B" unde k este numărul de coincidențe.

1.1.2. Regula produsului

Dacă un obiect A se poate alege în m moduri si dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A,B) în această ordine poate fi realizată în m·n moduri.

1.1.3. Principiul cutiei (Dirichlet)

Dacă n cutii şi mai mult de n+1 obiecte trebuie aranjate în cele n cutii, atunci cel puțin 2 obiecte se află în aceeaşi cutie.

1.1.4. Principiul inducției matematice

Fie P(n),n≥k o propoziție matematică, $k\in N$ fixat, $n\in N$.
Dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:
I. P(k) "A"
II. Dacă P(p) "A", ($\forall$) p=$\overline{k,n}$ atunci P(n+1) "A"
Atunci p(n) "A", ($\forall$) n≥k
Schiță de demonstrație P(k) "A"=>P(k+1) "A"=>P(k+2) "A"=>…

1.1.5. Principiul includerii şi excluderii

$|A \cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

$|A \cup B \cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i\prec j\le n}|A_i\cap A_J|+\ldots+(-1)^n\,|\bigcap_{i=1}^{n}A_i|$$

unde A,B,C, $A_1,A_2,\ldots,A_n$ mulțimi finite

1.2. Probleme rezolvate (Algebră)

1.2.1. Mulțimi ordonate

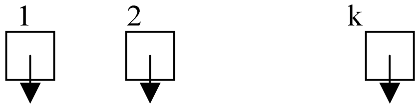
O mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunerea elementelor sale este o combinație (sau mulțime ordonată).

Se numeşte aranjament de n elemente luate câte k orice combinație alcătuită din k elemente ale mulțimii A.

Două aranjamente de n elemente luate câte k se deosebesc prin natura elementelor sau prin ordinea lor.

A_n^k=numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k= $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$

1 2 k



n moduri n-1 moduri n-k+1 moduri

Prima poziție a unui aranjament se poate completa în n moduri.

A doua poziție în n-1 moduri… etc.

Total, conform regulii produsului = $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$, unde $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, $0!=1$, $1!=1$.

1.2.2. Permutări

Pentru $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ considerăm un aranjament de n elemente luate câte n. Acest aranjament se numeşte permutare de n elemente.

Numărul permutărilor de n elemente =$P_n=n(n-1)\cdot\ldots\cdot1=n!$, $P_n=n!$, $n\geq1$.

1.2.3. Numărul de funcții f:A→B (|A|=m, |B|=n)

Numărul de funcții f:A→B (|A|=m, |B|=n) este n^m.

Rezolvare

$B^A=\{f|f:A\rightarrow B\}$

$|B^A|=|B|^{|A|}$

$A=\{a_1,\ldots,a_m\}$, $B=\{b_1,\ldots,bn\}$

f : A →B este bine determinată dacă ştim care sunt valorile lui $f(a_1)$, $f(a_2)$,…, $f(a_m)$ care se pot alege conform regulii produsului dintre elementele lui B în număr de $\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{m \text{ ori}}$ moduri= n^m moduri =>$|B^A|=n^m$.

1.2.4. Funcţii injective

f : A →B injectivă ⇔ $(\forall)\ x_1,x_2\in A,\ x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

⇔ $(\forall)x_1,x_2\in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

⇔ ecuaţia f(x)=y are cel mult o soluţie în A.

Funcţii surjective

f :A→B surjectivă ⇔$(\forall)\ y\in B$, ecuaţia f(x)=y are cel puţin o soluţie în A

⇔ Im f =B

Funcţii bijective

f :A→B bijectivă ⇔ funcţie injectivă+ surjectivă

⇔ $(\forall)y\in B$, ecuaţia f(x)=y are exact o soluţie în A.

Numărul de funcţii injective =A_m^n, n≤m.

f :A→B a.î. |A|=n, |B|=m.

Numărul de funcţii bijective

f :A→B, |A|=|B|=n este P_n=n!.

Observaţii

f :A→B bijectivă => |A|=|B|, A,B-finite

1.2.5. Combinări

Dacă A este o mulţime cu n elemente, atunci submulţimile lui A formate din k elemente 0≤k≤n se numesc combinări de n elemente luate câte k.

Numărul lor se notează $C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{A_n^k}{k!}$ deoarece nu contează ordinea elementelor = $\frac{n!}{k!(n-k)!}, 0\leq k\leq n, n\in N.$

1.2.6. Mulţimea părţilor unei mulţimi date

Fie A o mulţime. $P(A)=\{B|B\subseteq A\}$

Dacă |A|=n, atunci $|P(A)|=2^n$.

Rezolvare

I. Verificăm dacă P(0) este adevărată.

$A=\emptyset$, $|A|=0$ Singura submulțime a lui A este $\emptyset$

$\Rightarrow |P(A)|=1=2^0$ adevărată.

II. Presupunem că dacă $|A|=p$, $0\le p\le n$, atunci $|P(A)|=2^p$,A este o mulțime oarecare

Fie B a.î.$|B|==n+1$, $B=\{a_1,a_2,\ldots,a_n,a_{n+1}\}$.

$P(B)=T\cup S$

T={mulțimea submulțimilor lui B, cu proprietatea că $a_{n+1}\notin$ unei altfel de submulțimi}.

S={mulțimea submulțimilor lui B, cu proprietatea că $a_{n+1}\in$ unei altfel de submulțimi}.

$|S|=|T|$

$S=\{U\cup\{a_{n+1}\}|U\in T\}$

$|T|=|P(\{a_1,\ldots a_n\})|=2^n \Rightarrow |P(B)|=|T\cup S|=|T|+|S|=2^n+2^n=2^{n+1}$.

Din I și II $\Rightarrow |P(A)|=2^{|A|}$ $(\forall)$ A mulțime finită

Observație. Din această relație rezultă $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$

Probleme rezolvate

R1.2.1. Se consideră un tablou în formă de pătrat astfel încât pe fiecare linie și fiecare coloană să avem n căsuțe ($n\ge2$) care se completează cu numere întregi. Determinați în câte moduri poate fi completat tabloul dacă produsul numerelor de pe fiecare linie, coloană este 5 sau -5.

Rezolvare

Pentru început determinăm numărul de aranjări ale numerelor 5 sau -5. Dacă pe o linie, coloană apare 5 sau -5, atunci pe acea linie, coloană nu va mai apărea 5 sau -5.

Este suficient să vedem în câte moduri putem completa liniile cu 5, respectiv -5.

Linia 1 – 2n posibilități de completare cu 5 sau -5

Linia 2 – 2(n-1) posibilități de completare cu 5 sau -5

…………………………………………………

Linia n – 2 posibilități de completare cu 5 sau -5

Din regula produsului rezultă că avem $2^n\cdot n!$ posibilități de completare cu 5 sau -5

În continuare pentru fiecare completare a unei linii cu 5 sau -5 mai avem 2^{n^2-n} posibilități de completare cu 1,-1= numărul funcțiilor definite pe o mulțime cu n^2-n elemente (pozițiile rămase libere) cu valori în mulțimea {-1,1}.

În total numărul de completări este $2^n\cdot n!\cdot 2^{n^2-n}=2^{n^2}\cdot n!$

R1.2.2. Fie $n\ge3$ un număr întreg. Demonstrați că este posibil ca eliminând cel mult două dintre elementele mulțimii $\{1,2,\ldots,n\}$ să obținem o mulțime care are suma elementelor pătrat perfect.

Rezolvare

S= 1+2+3+…+n=$\frac{n(n+1)}{2} < \frac{2n^2}{2} = n^2$.

Se consideră S,S-1,S-2,…,S-2n+1 sumele formate cu elementele mulțimii A din care ori nu scoatem nici un element, ori un element, respectiv 2 elemente (am ales aici sumele distincte).

Presupunem că nici un număr nu este pătrat perfect => ($\exists$) k≤n a.î. $(k-1)^2 < S-2n+1 < S-2n < \ldots < S < k^2$.

Numerele dintre cele două pătrate perfecte sunt în număr de $k^2-(k-1)^2+1-2=$ $=2k-2$ numere =>contradicție, ele fiind cel puțin S-S+2n-1+1=2n numere şi 2k-2<2n. Deci cel puțin unul dintre numerele de mai sus este pătrat perfect.

R1.2.3. La un turneu de tenis au participat de două ori mai mulți băieți decât fete. Fiecare pereche de participanți a jucat exact o dată şi nu au fost rezultate egale. Raportul dintre numărul victoriilor obținute de fete, față de cele obținute de băieți a fost de $\frac{7}{5}$. Câți participanți au fost la acest turneu?

Rezolvare

n-numărul fetelor

2n-numărul băieților

3n-număr participanți

Numărul total de meciuri $=C_{3n}^2=\frac{3n(3n-1)}{2}$.. Numărul total de victorii ale băieților reprezintă $\frac{5}{12}$ din total, deci $\frac{5}{12}C_{3n}^2=\frac{5n(3n-1)}{8}$. Meciurile jucate între băieți sunt în număr de $C_{2n}^2=\frac{2n(2n-1)}{2}$ =n(2n-1)- considerate victorii ale băieților.

$\frac{5n(3n-1)}{8} \geq n(2n-1) \Leftrightarrow 15n-5 \geq 16n-8 \Leftrightarrow n \leq 3$.

Analizăm cazurile n=1, n=2, nu convin. n=3 convine. Numărul participanților este 9.

R1.2.4. Se consideră un dreptunghi de dimensiuni1x n, n≥1număr natural şi dale pătrate de dimensiuni 1 x 1 de patru culori. Se pavează dreptunghiul cu dale astfel încât oricare două dale alăturate să aibă culori diferite.

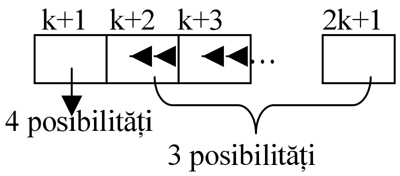
a) Câte pavări simetrice există?

b) Câte pavări au proprietatea că oricare trei dale consecutive au culori diferite?

Rezolvare

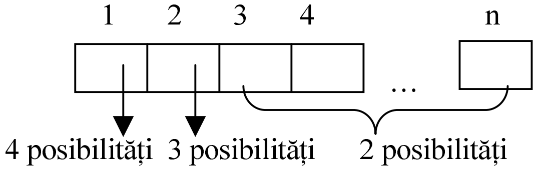
a) Cazul I n=2k, imposibilă efectuarea unei pavări simetrice ca mai sus, cele două dale din mijloc având aceeaşi culoare

Cazul II n=2k+1 – vom discuta modalitățile de pavare în funcție de dala din mijloc spre dreapta, ținând cont că pavarea este simetrică.



Total, conform regulii produsului $4\cdot 3^k$ posibilități.

b)



Total, $4\cdot 3\cdot 2^{n-2}=3\cdot 2^n$ posibilități.

R1.2.5.Să se determine numărul de diagonale ale unui patrulater convex cu n laturi.

Rezolvare

Numărul de diagonale = numărul de segmente determinate de cele n vârfuri din care scoatem cele n laturi $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$.

R1.2.6. Care sunt poligoanele convexe care au proprietatea: numărul diagonalelor lor este egal cu numărul punctelor de intersecție ale acestor diagonale situate în interiorul poligonului și nu există trei diagonale concurente în interiorul poligonului?

Rezolvare

Numărul diagonalelor $=\frac{n(n-3)}{2}$

Numărul punctelor date $=C_n^4=$ deoarece intersecția a două diagonale în interiorul patrulaterului convex reprezintă intersecția diagonalelor în patrulaterul convex determinat de 4 vârfuri ale poligonului corespunzătoare celor două diagonale și reciproc 4 vârfuri ale poligonului determină două diagonale care se intersectează în interiorul poligonului.

Deci rămâne de rezolvat ecuația $C_n^4=\frac{n(n-3)}{2}$, $n\geq 4 \Leftrightarrow (n-1)(n-2)=12 \Leftrightarrow n=5$

Poligoanele căutate sunt pentagoanele convexe.

R1.2.7. Care este numărul maxim de unghiuri ascuțite pe care le poate avea un poligon convex cu n laturi?

Rezolvare

Considerăm că poligonul are k unghiuri ascuțite. Deci suma unghiurilor sale este mai mică decât $k\cdot 90^\circ+(n-k)\cdot 180^\circ$. Pe de altă parte suma unghiurilor unui poligon cu n laturi este egală cu (n-2)·180º. Deci (n-2)·180º< k·90º+(n-k)·180º => k<4 => k=3 numărul maxim (vezi cazul unui triunghi ascuțitunghic).

R1.2.8. Fiecărui punct din plan i se asociază un număr real astfel încât numărul asociat centrului cercului înscris într-un triunghi să fie egal cu media aritmetică a numerelor asociate vârfurilor triunghiului, oricare ar fi acesta. Să se arate că tuturor punctelor din plan le este asociat acelaşi număr.

Rezolvare

Fie ABCDEF hexagon regulat

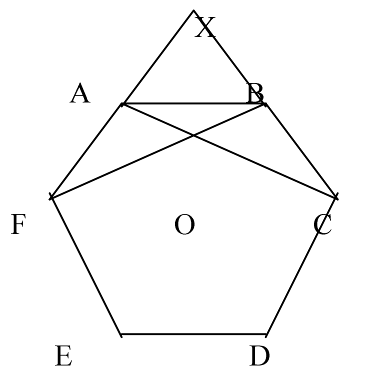
D,E alese arbitrar, de la ele pornind construcția.

A(a), B(b), C(c), D(d), E(e), X(x) unde {X}=AF ∩ BC

Δ ACE şi Δ BDF - triunghiuri echilaterale cu centrul 0 => a + c + e = b + f + d.

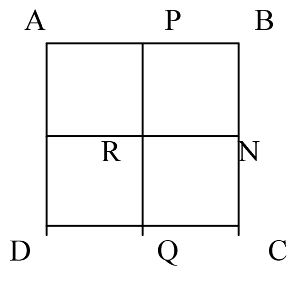
Δ XBF şi Δ XAC – au aceleaşi centru pentru cercurile înscrise datorită simetriei față de dreapta OX. x + b + f = x + a + c => b + f = a + c => d = e q.e.d, D şi E fiind alese arbitrar.

O este centrul hexagonului regulat



R1.2.9. În interiorul unui pătrat de latură 1 se consideră 9 puncte. Să se arate că putem alege 3 dintre acestea să fie vârfurile unui triunghi cu aria cel mult egală cu 1/8.

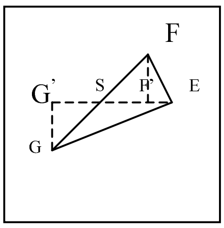
Rezolvare



Se iau mijloacele laturilor pătratului ca în figură.

Conform principiului lui Dirichlet, cel puțin 3 se află într-un pătrat mic.

A P



M R

Ducem ES || MR (cazul când una din laturile triunghiului este paralelă cu o latură a pătratului sau inclusă în ea este trivial).

$A_{[EFG]}=A_{[FES]}+A_{[ESG]}=\frac{h_1 SE}{2}+\frac{h_2 SE}{2}=\frac{SE(h_1+h_2)}{2}\le\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{8}$ q.e.d. $FF^{`}=h_1$ $GG'=h_2$

Bibliografie

Manual cls. X-a - M.Ganga-Editura Math Press
Probleme elementare de matematică -M.Ganga-Editura Math Press 2003
Probleme de teoria numerelor şi combinatorică pentru juniori- *L.*Panaitopol, D.Şerbănescu
Olimpiade balcanice pentru juniori- D.Brânzei, I.Şerdean, V. Şerdean

2. Paralelism în spațiu

În cadrul temei vom prezenta principalele teoreme de paralelism respectiv teorema de paralelism a unei drepte cu un plan, plane paralele şi alte teoreme de paralelism deosebit de utile în rezolvarea problemelor, definirea corpurilor geometrice, a secțiunilor în corpuri geometrice, determinarea unor distanțe în spațiu, a unghiului a două drepte.

2.1. Drepte paralele

Definiția 2.1.1. Două drepte coplanare care nu au nici un punct comun se numesc drepte paralele.

Axioma 2.1.1. (Axioma paralelelor – Axioma lui Euclid) Printr-un punct exterior unei drepte putem construi o singură paralelă la dreapta dată.

2.2. Dreaptă paralelă cu un plan

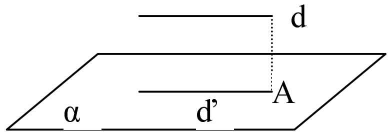
Definiția 2.2.1 O dreaptă este paralelă cu un plan dacă nu are nici un punct comun cu planul.

Notație: *Dacă* $d \cap \alpha = \Phi$, *notăm* $d \parallel \alpha$ *sau* $\alpha \parallel d$.

În rezolvarea problemelor apelăm mai puțin la definiție şi mai mult la teorema de paralelism.

Teorema 2.2.1 Dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă inclusă într-un plan atunci ea este paralelă cu planul sau inclusă în plan.

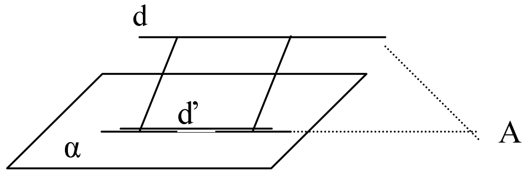
Demonstrație:



Fie planul α şi dreapta $d \not\subset \alpha$. Fie d' o dreaptă inclusă în α şi $d \parallel d'$.
Dreptele d şi d' sunt coplanare, $(d; d') = \beta$. Presupunem că $d \nparallel \alpha$, atunci $d \cap \alpha = \{A\}$
$\Rightarrow A \in d \subset \beta$, dar $A \in \alpha \cap \beta \Rightarrow A \in d'$ atunci $d \cap d' = \{A\}$, contrazice ipoteza, rezultă că presupunerea este falsă. $\Rightarrow d \parallel \alpha$.

Teorema 2.2.2 Fie d o dreaptă paralelă cu un plan α, iar β un plan care conține dreapta d. Atunci $\alpha \parallel \beta$ sau β intersectează pe α după o dreaptă d' şi $d \parallel d'$.

Demonstrație



Presupunem că $\alpha \nparallel \beta$, atunci $\alpha \cap \beta = d'$ şi demonstrăm că $d \parallel d'$.
Presupunem că $d \nparallel d'$, d şi d' sunt coplanare $\Rightarrow d \cap d' = \{A\}$. Din $A \in d$ şi

$A \in d' \subset \alpha$; $\Rightarrow A \in \alpha$; $\Rightarrow A \in d \subset \alpha$, contradicție cu $d \parallel \alpha$; $\Rightarrow$ presupunerea este falsă $\Rightarrow d \parallel d'$.

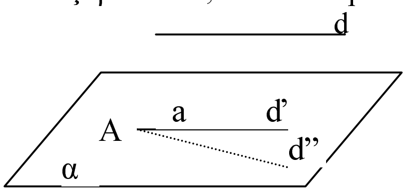
Teorema 2.2.3 Fie d o dreaptă inclusă, sau paralelă cu un plan α şi fie d' o dreaptă paralelă cu d, dusă printr-un punct A al planului α, atunci d este inclusă în planul α.

Demonstrație:

1° Cazul $d \subset \alpha$

Fie β= (d; d'). Planele α şi β coincid, având dreapta a şi punctul A în comun.

Rezultă $d' \subset \alpha$



2° Cazul $d \not\subset \alpha$

Notăm β = (d; d'). Dacă β 1 α = d'', atunci conform teoremei precedente rezultă $d \parallel d'$ .Dacă d şi d'' nu coincid atunci prin A trec două paralele la d, ceea ce contrazice axioma paralelelor rezultă că d' = d''.

Teorema 2.2.4. Dacă a, b, c, sunt trei drepte astfel încât $a \parallel b$ şi $b \parallel c$ atunci $a \parallel c$ (tranzitivitatea relației de paralelism).

Teorema 2.2.5 Fie $\widehat{XOY}$ şi $\widehat{X'O'Y'}$ două unghiuri diferite.

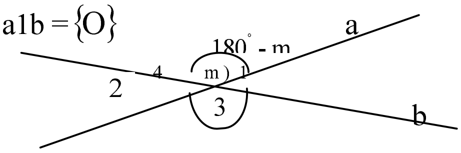
Dacă $OX \parallel O'X'$ şi $OY \parallel O'Y'$, atunci unghiurile $\widehat{XOY}$ şi $\widehat{X'O'Y'}$ sunt congruente sau suplementare.

2.3 Măsura unghiului a două drepte în spațiu

Fie dreptele a şi b astfel încât a1b = {O}

Atunci $\hat{O}_1 \equiv \hat{O}_2$ (opuse la vârf)

$\hat{O}_3 \equiv \hat{O}_4$ (opuse la vârf)



Definiția 2.3.1.: Cea mai mică dintre măsurile **m** şi **180° - m** se numeşte măsura unghiului dreptelor concurente a şi b .

Observații: 1° Dacă m=90° atunci $a \perp b$;

2° Dacă m = 0° atunci $a \parallel b$;

Definiția 2.3.2.: Măsura unghiului dreptelor a şi b este măsura unghiului dreptelor a′ şi b′ paralele cu a şi b, duse printr-un punct oarecare P. (conform teoremei unghiurilor cu laturile paralele).

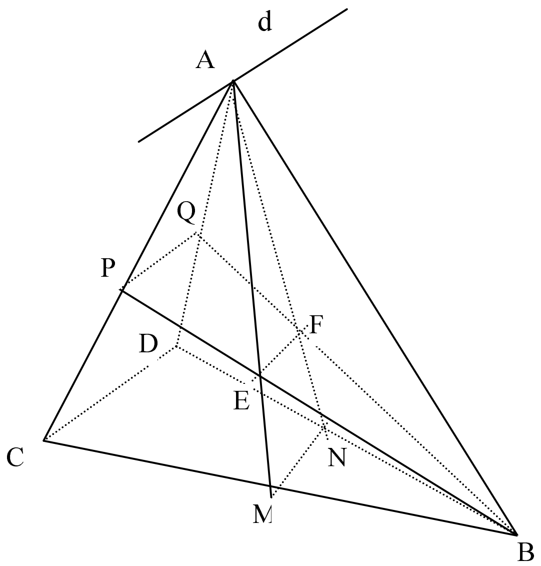
Dacă m(a; b) = 90° $\Rightarrow a \perp b$;

Probleme rezolvate

R2.4.1. Fie *A,B,C,D* patru puncte necoplanare astfel încât *BC=BD* . Bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ şi $\angle ABD$ intersectează pe *AC* în *P* şi respectiv pe *AD* în *Q*.

1. Demonstraţi că $PQ \,//\, (BCD)$
2. Perpendicularele duse din *A* pe bisectoarele *BP* şi respectiv *BQ* intersectează pe *BP* în *E* şi pe *BC* în *M*, şi respectiv pe *BQ* în *F* şi pe *BD* în *N*, determinaţi poziţia dreptei *EF* faţă de planul *(ACD)*.
3. Determinaţi intersecţia planelor *(PCD)* şi *(MNF)*.

Soluţie:



1. În Δ ABC,(BP este bisectoare)

$\Rightarrow$ *T. bisectoarei*: $\dfrac{BC}{BA}=\dfrac{CP}{PA}$ (1)

În Δ ABD, (BQ este bisectoare)

$\Rightarrow$ *T. bisectoarei:* $\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{DQ}{QA}$ (2)

BC = BD (ip). (3)

Din relaţiile (1), (2), şi (3)

$\Rightarrow \dfrac{CP}{PA}=\dfrac{DQ}{QA}$

$\xrightarrow[\Delta ACD]{\text{R.T.Thales}}$ $\left.\begin{array}{l} PO \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \end{array}\right\} \Rightarrow$

PQ ∥ (BCD).

2. În ΔABM, BE bisectoare şi înălţime $\Rightarrow$ Δ ABM isoscel

$\Rightarrow$ BE- mediană $\Rightarrow$AE =EM (3)

În ΔABN, BF bisectoare şi înălţime $\Rightarrow$ BF- mediană $\Rightarrow$AF = FN (4)

Din relaţiile (3) şi (4) $\Rightarrow$ EF –linie mijlocie în ΔAMN $\Rightarrow$ EF ∥ MN

MN $\subset$ (BCD)

$\left.\begin{array}{l} \Delta\ ABM \text{ isoscel} \Rightarrow BM = BA \\ \Delta\ ABN \text{ isoscel} \Rightarrow BN = BA \end{array}\right\}$ BM = BN,

iar din ipoteză BC=BD $\Rightarrow$ MN∥CD şi CD $\subset$ (ACD) $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} MN \parallel (ACD) \\ MN \parallel EF \end{array}\right\} \Rightarrow$

EF ∥ (ACD).

3. $$\left.\begin{array}{l} CD \parallel MN \\ CD \subset (ACD) \\ MN \subset (AMN) \\ A \in (AMN)\ 1\ (ACD) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (AMN)\cap(ACD) = d \\ A \in d \text{ şi } d \parallel CD \parallel MN \end{array}$$

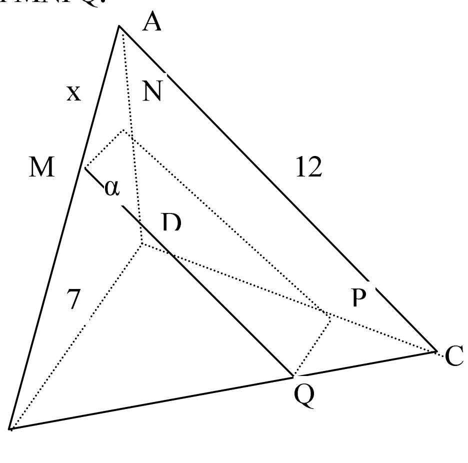
Dar (AMN) = (MNF) şi (PCD) = (ACD)

$\Rightarrow$ (ACD) $\cap$ (MNF) = d

R2.4.2.: Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D. Printr-un punct M de pe segmentele (AB) se duce un plan paralel cu AC şi BD. Acest plan intersectează pe BC în Q, pe CD în P şi pe AD în N.

1) Să se arate că MNPQ este paralelogram;
2) În ce condiții patrulaterul MNPQ este dreptunghi?
3) În cazul AM = x, AB= 5 cm, AC =12 cm, BD = 7 cm, să se calculeze, în funcție de x, perimetrul patrulaterului MNPQ.

Soluție:



1. Notăm cu α planul ce trece prin M şi A ∥AC şi α ∥ BD

$$\left.\begin{array}{l} BD \parallel \alpha \\ (ABD)\cap \alpha = \{MN\} \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel BD\ (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} BD \parallel \alpha \\ (BCD)\cap \alpha = \{PQ\} \end{array}\right\} \Rightarrow PQ \parallel BD\ (2)$$

Din relațiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ MN ∥ PQ (3)

$$\left.\begin{array}{l} AC \parallel \alpha \\ (ABC)\cap \alpha = \{MQ\} \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \parallel AC\ (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} AC \parallel \alpha \\ (ACD)\cap \alpha = \{NP\} \end{array}\right\} \Rightarrow NP \parallel AC\ (5)$$

Din relațiile (4) şi (5) $\Rightarrow$ NP ∥ AC (6)

Din relațiile (3) şi (6) $\Rightarrow$ MNPQ este paralelogram

2. $$\left.\begin{array}{l} MN \parallel BD \\ MQ \parallel AC \\ MN \perp MQ \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp AC$$

Deci MNPQ este dreptunghi dacă AC $\perp$ BD.

3. Din MN ∥ BD în Δ ABD $\Rightarrow$ T.F.A.$\Rightarrow$ Δ AMN ~Δ ABD

$$\Rightarrow \frac{\text{AM}}{\text{AB}} = \frac{\text{MN}}{\text{BD}} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{\text{MN}}{7} \Rightarrow \text{MN} = \frac{7x}{5}$$

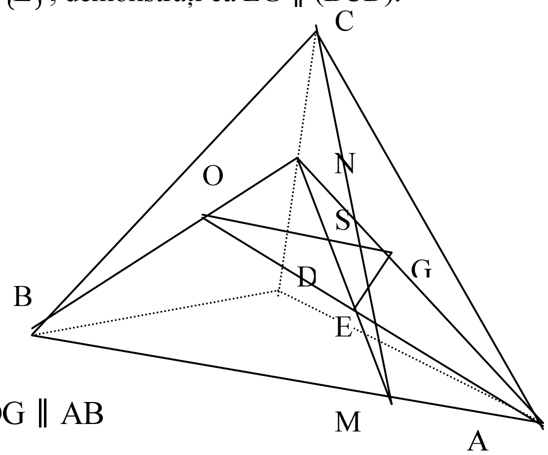
Din MQ ∥ AC în ΔABC ⇒ T.f.a.ΔBMQ ~Δ BAC

$$\Rightarrow \frac{\text{BM}}{\text{BA}} = \frac{\text{MQ}}{12} \Rightarrow \frac{5-x}{5} = \frac{\text{MQ}}{12} \Rightarrow \text{MQ} = \frac{12(5-x)}{5}$$

$$p_{\text{MNPQ}} = 2\text{MN} + 2\text{MQ} = 2\ \frac{7x}{5} + 2\cdot \frac{12(5-x)}{5} = \frac{14x+120-12x}{5} = \frac{2x+120}{5}$$

R2.4.3.: Fie O şi G centrele de greutate ale triunghiurilor BDC şi respectiv ACD situate în plane diferite. Dacă N este mijlocul segmentului $[\text{CD}]$, iar M∈(AB) astfel încât $\frac{\text{AM}}{\text{AB}} = \frac{2}{5}$ şi MN∩AO = $\{\text{E}\}$, demonstrați că EG ∥ (BCD).

Soluție



O centrul de greutate al Δ BCD $\Rightarrow \frac{BO}{ON} = \frac{2}{1}$

G. Centrul de greutate al ΔACD$\Rightarrow \frac{AG}{GN} = \frac{2}{1}$

dar $\frac{BO}{ON} = \frac{AG}{GN} = \frac{2}{1} \Rightarrow$

R.T.Thales în ΔABN ⇒ OG ∥ AB

Fie OG ∩ MN = $\{\text{S}\}$

În ΔNBM, OS ∥ BM ⇒ (T.F.A) Δ NOS ~ ΔNBM

$$\Rightarrow \frac{\text{OS}}{\text{BM}} = \frac{\text{ON}}{\text{NB}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{OS} = \frac{\text{BM}}{3}$$

$$\text{Din } \frac{\text{AM}}{\text{AB}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{\text{BM}}{\text{AB}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{BM} = \frac{3\text{AB}}{3}$$

$$\text{atunci înlocuind în relația OS} = \frac{BM}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{OS} = \dfrac{\frac{3AB}{5}}{3} = \dfrac{AB}{5} \\ \text{AM} = \dfrac{2}{5}AB \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OS}{AM} = \frac{1}{2}$$

$$\text{din OS} \parallel \text{AM} \Rightarrow \Delta\text{AEM} \sim \Delta\text{OES} \Rightarrow \frac{\text{OS}}{\text{AM}} = \frac{\text{OE}}{\text{EA}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dacă } \frac{OE}{EA} = \frac{1}{2} = \frac{NG}{GA} \Rightarrow \text{R.T.Thales- } \Delta\, ANO \quad \left.\begin{array}{r} EG \parallel NO \\ NO \subset (BCD) \end{array}\right\} \Rightarrow EG \parallel (BCD)$$

2.4. Plane paralele

Definiția 2.4.1 : Două plane α şi β sunt paralele dacă nu au nici un punct comun.

Notăm: $\alpha \parallel \beta$. Dacă $\alpha \cap \beta = \Phi$ atunci $\alpha \parallel \beta$.

În rezolvarea problemelor nu este suficientă definiția pentru a determina soluția unei probleme, fiind nevoie de o teoremă care să justifice paralelismul planelor.

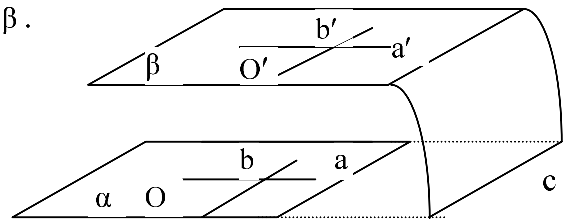
Lema 2.4.1. (teoremă ajutătoare). Dacă a şi b sunt două drepte paralele, iar α şi β două plane astfel încât $a \subset \alpha$ şi $b \subset \beta$ şi $\alpha \cap \beta = c$, atunci c este paralelă cu a şi b.

Teorema 2.4.1. Dacă un plan conține două drepte concurente, paralele cu celălalt plan atunci planele sunt paralele.

Demonstrație: fie planul α astfel încât $a, b \subset \alpha$, $a \cap b = \{O\}$ şi O' exterior planului α.

Prin O' ducem dreptele $a' \parallel a$ şi $b' \parallel b$, rezultă că $a' \parallel \alpha$ şi $b' \parallel \alpha$

Dreptele a' şi b' determină planul β. Dacă $\alpha \nparallel \beta$ atunci se intersectează după dreapta c, atunci conform lemei (2.3.1) rezultă că $c \parallel a$ şi $c \parallel b$, dar $a \cap b = \{O\}$ contrazice axioma paralelelor rezultă că presupunerea este falsă $\Rightarrow \alpha \parallel \beta$.

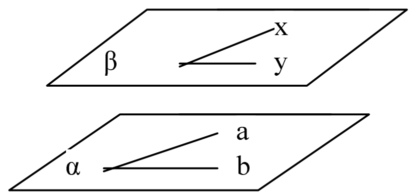


Teorema 2.4.2. Fiind date un plan α şi un punct A exterior planului, există un plan unic, ce conține punctul A şi este paralele cu planul α

Demonstrație :

Prin A ducem dreptele Ax şi Ay paralele cu α, atunci $\beta \parallel \alpha$, $\beta = (Ax; Ay)$. Vom demonstra că planul β este unic.Fie a şi b incluse în planul α şi $a \parallel Ax$ şi $b \parallel Ay$

Orice plan γ care conține pe A şi este paralel cu α, este paralel cu a şi b. Conform teoremei (2.2.3) planul γ trebuie să conțină dreptele Ax şi Ax prin urmare $\gamma = \beta$

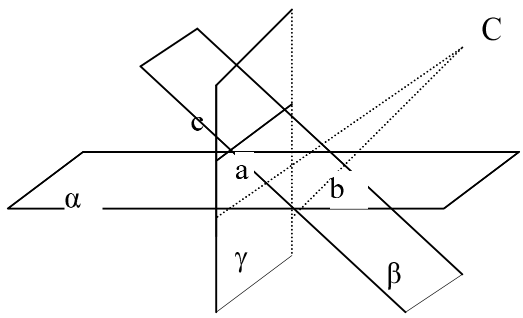


Teorema 2.4.3 Dacă două plane sunt paralele, orice plan care intersectează pe primul îl intersectează şi pe al doilea şi dreptele de intersecție sunt paralele.

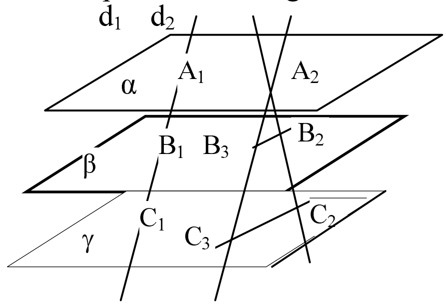
Teorema 2.4.4. Două plane distincte paralele cu al treilea sunt paralele între ele.

Teorema 2.4.5. Dacă trei plane nu au toate trei un punct comun dar se taie două câte două atunci dreptele de intersecție sunt paralele.

Demonstrație : presupunem că $a \nparallel b$,atunci $a \cap b = \{C\}$,dar în aceste condiții $C \in \alpha \cap \beta \cap \gamma$, contrazice ipoteza , rezultă că presupunerea este falsă $\Rightarrow a \parallel b$, analog $a \parallel b \parallel c$.



Teorema 2.4.6 (teorema lui Thales în spațiu). Mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare, care le intersectează pe acestea, segmente proporționale.



Demonstrație:

Fie $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ și distincte două câte două.
Dreptele d_1 și d_2 sunt distincte și taie cele
Trei plane A_1, B_1, C_1 respectiv A_2, B_2, C_2.
Ducem prin A_2 dreapta d_1' cu β și γ. Atunci
în $\Delta\, A_2C_2C_3$ avem $B_2B_3 \parallel C_2C_3$ rezultă

Conform teoremei lui Thales că $\dfrac{A_2B_3}{B_3C_3} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$ (1)

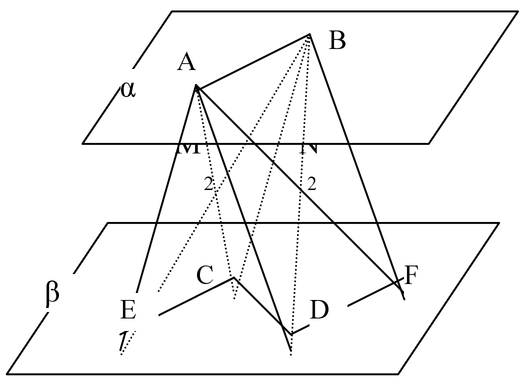
Dar $A_1B_1 \parallel A_2B_3$, $B_1C_1 \parallel B_3C_3$ și
$A_1A_2 \parallel B_1B_3 \parallel C_1C_3$ atunci $A_1B_1B_3A_2$ și $B_1C_1C_3B_3$ sunt paralelograme

$\Rightarrow A_1B_1 = A_2B_3$ și $B_1C_1 = B_3C_3$, înlocuind în relația (1) obținem $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$

Probleme rezolvate

R2.7.1 Fie α și β două plane paralele, iar A și B ∈ α; C și D ∈ β astfel încât A,B,C,D să fie necoplanare. Dacă M este mijlocul lui(AC) și N este mijlocul lui (BD) iar $AN \cap \beta = \{F\}$, $BM \cap \beta = \{E\}$, demonstrați că:

1° ABCE și ABDF sunt paralelograme;
2° (AED) ∥ (BCF);
3° ΔADE ≡ ΔBCF



Soluție :

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ\ \alpha \parallel \beta \\ (ABC) \cap \alpha = AB \\ (ABC) \cap \beta = CE \end{array}\right\} \Rightarrow AB \parallel CE \ (1)$$

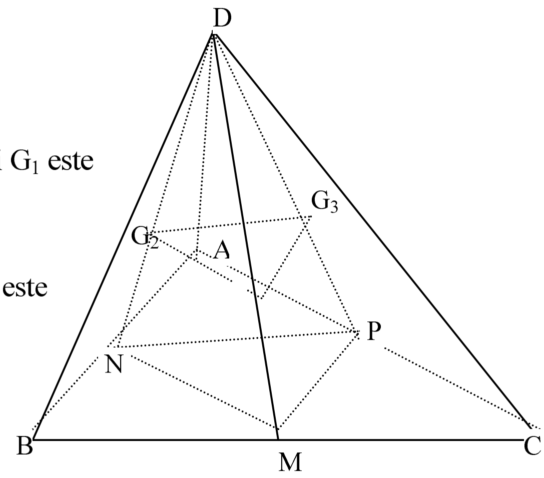
$$\Delta AMB \equiv \Delta CME \ (ULU) \left\{ \begin{array}{l} (AM) \equiv (MC) \\ \hat{M}_1 \equiv \hat{M}_2 \text{ (opuse la vârf)} \\ \hat{A} \equiv \hat{C} \text{ (alt. int.)} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow (AB) \equiv (CE)$ (2). Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow$ ABCE paralelogram
Analog demonstrăm că ABFD este paralelogram.

2° $\left.\begin{array}{l} \text{ABCE –paralelogram} \Rightarrow AE \parallel BC \\ \text{ABFD- paralelogram} \Rightarrow AD \parallel CF \end{array}\right\} \Rightarrow (ADE) \parallel (BCF)$

3° $\begin{array}{l} \Delta ADE \\ \\ \Delta BCF \end{array} \left\{\begin{array}{l} \widehat{EAD} \equiv \widehat{CBF} \text{ (au lat. paralele)} \\ (AE) \equiv (BC) \text{ (op.în } ▱ \\ (AD) \equiv (BF) \text{ (op.în } ▱ \end{array}\right\} \text{(L.UL.)} \Rightarrow \Delta ADE \equiv \Delta BCF$

R2.7.2. În triunghiul ABC, $a^2b - c^2b + a^2c - b^2c = b^3 + c^3$.
Fie D $\notin (ABC)$ și G_1, G_2. G_3 respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor DBC, DAB, DAC. Să se arate că:
1° $(G_1, G_2. G_3) \parallel (ABC)$;
2° $G_1G_2 \perp G_1G_3$;



1° În ΔDBC, DM este mediană, $M \in BC$ și G_1 este centrul de greutate $\Rightarrow \dfrac{DG_1}{G_1M} = \dfrac{2}{1}(1)$
În ΔDAB, DN este mediană, $N \in AB$ și G_2 este centrul de greutate $\Rightarrow \dfrac{DG_2}{G_2N} = \dfrac{2}{1}(2)$
iar în triunghiul DAC, DP este mediană, $P \in AC$ și G_3 este centrul de greutate.
$\dfrac{DG_3}{G_3P} = \dfrac{2}{1}(3)$ din relațiile (1), (2), (3)

$$\Rightarrow \frac{DG_1}{G_1M} = \frac{DG_2}{G_2N} = \frac{DG_3}{G_3P} = \frac{2}{1}$$

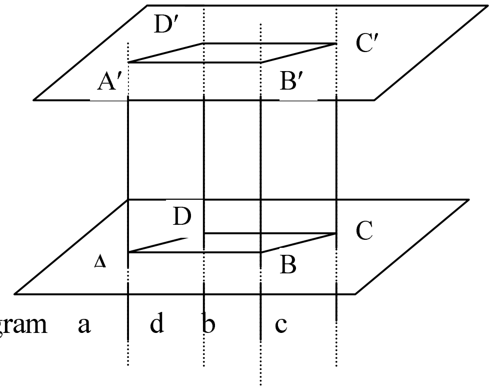
Aplicăm reciproca teoremei lui Thales în triunghiurile DMN și DNP și rezultă că:
$G_1G_2 \parallel MN$; $MN \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABC)$
$G_2G_3 \parallel NP$; $NP \subset (ABC) \Rightarrow G_2G_3 \parallel (ABC)$
$\Rightarrow (G_1 G_2G_3) \parallel (ABC)$

2° Din $a^2b - c^2b + a^2c - b^2c = b^3 + c^3$. Rezultă că
$a^2(b + c) - bc(b + c) = (b+c)(b^2 - bc + c^2)$: $(b+c)$
și obținem $a^2 - bc = b^2 - bc + c^2$ $-bc$
$a^2 = b^2 + c^2$ Din R.T.P. $\Rightarrow \Delta$ ABC dreptunghic în A.
Din $G_1G_2 \parallel MN$; $MN \parallel AC \Rightarrow G_1G_2 \parallel AC$ (4)
$G_1G_3 \parallel MP$; $MP \parallel AB \Rightarrow G_1G_3 \parallel AB$ (5)
Din relațiile (4) și (5) și $AC \perp AB$ rezultă că $G_1G_2 \perp G_1G_3$

R2.7.3. Dacă patru drepte paralele intersectează un plan α în vârfurile A,B,C,D ale unui paralelogram, atunci, ele determină pe orice plan care le intersectează vârfurile unui paralelogram. Dreptele a şi AB determină un plan (a;AB), dreptele d şi CD determină planul (d; CD) şi $a \| d$, $AB \| CD \Rightarrow$ planele (d;CD) şi (a; AB) sunt paralele, analog planele (a;AB) ‖ (b;BC), atunci orice plan β care intersectează dreptele va determina:

$$\left.\begin{array}{l}\beta \cap (a;AB) = A'B' \\ \beta \cap (d;CD) = C'D' \\ (a;AB) \| (d;CD)\end{array}\right\} \Rightarrow A'B' \| C'D' \ (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta \cap (a;AD) = A'D' \\ \beta \cap (b;BC) = B'C' \\ (a;AD) \| (b;BC)\end{array}\right\} \Rightarrow A'D' \| B'C' \ (2)$$



Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ A′B′C′D′ este paralelogram

Bibliografie

D.Brânzei şi colectivul, Planul şi spaţiul euclidian; Ed. Academiei 1986

D.Brânzei şi colaboratorii, Bazele raţionamentului geometric, Ed. Academiei 1983

J. Hadamard, *Lecţii de geometrie elementară, Geometrie în spaţiu*, Ed. Tehnică 1961

A.N. Kolmogorov, A.F. Semenovici, F.F. Naghibiu, R.S. Cerkosov, V.A. Guşev, *Geometrie pentru clasele VI-VIII*, EDP 1979

K. Teleman, M. Florescu, C. Rădulescu, D. Moraru, E. Stătescu, *Matematică-geometrie şi trigonometrie clasa a X-a*, EDP 1979

M. Miculiţa, *Introducere în geometria tetraedrului*, Ed. Minied, Iaşi 1994

I. Cuculescu şi colectivul, *Matematică- Geometrie- Manual pentru clasa a VIII-a*, EDP 1997

A. Negrilă, M. Negrilă, *Algebră-Geometrie - clasa a VIII-a*, Ed. Paralela 45/ 2002

A. Bălăucă, I. Ţicalo, *Matematică-Geometrie în spaţiu*, Ed. Axa Botoşani 1996 pag 7-11

D. Brânzei şi colectivul: *Matematica în concursurile şcolare*, Ed. Paralela 45, 2001,2002 pag 55-84(2001);pag 56-73(2002)

Gh. Ţiţeica, *Probleme de geometrie*, Ed. Tehnică 1981,pag 90-95

C. Hărăbor, D.Săvulescu, I. Cheşcă, A.Ţifrea: *Matematică pentru clasele V-VIII - Olimpiadele judeţene, interjudeţene, naţionale*, Ed. Teora 1996, pag 278-279

E. Feru, I. Olivotto, *Cum gândim problemele de geometrie în spaţiu*, Ed. Art Bucureşti 1994, pag 9-11

3. Perpendicularitate în spațiu

Tema va cuprinde principalele teoreme de perpendicularitate şi anume: teorema de perpendicularitate a unei drepte pe un plan, teorema celor trei perpendiculare, plane perpendiculare, unghiul unei drepte cu un plan, unghiul a două plane, proiecții, teoreme deosebit de utile în abordarea problemelor de perpendicularitate şi studiul corpurilor geometrice.

3.1. Dreaptă perpendiculară pe un plan

Definiția 3.1.1. Două drepte a şi b din spațiu sunt perpendiculare dacă paralelele duse printr-un punct P la ele sunt perpendiculare.

Definiția 3.1.2. O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă este perpendiculară pe orice dreaptă a planului.

Notație: $d \perp \alpha$ sau $\alpha \perp d$

În rezolvarea de probleme nu este eficientă definiția fiind necesară teorema de perpendicularitate care reduce condiția la perpendicularitatea dreptei pe două drepte concurente din acel plan.

Teorema 3.1.1. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan, atunci dreapta este perpendiculară pe plan.

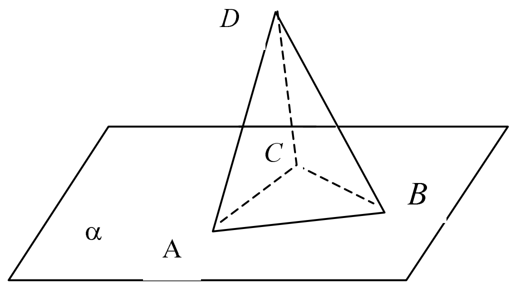
Teorema 3.1.2. Dintr-un punct M se poate duce pe un plan α, o unică perpendiculară.

Teorema 3.1.3. Două plane perpendiculare pe aceeaşi dreaptă sunt paralele între ele.

Teorema 3.1.4. Există un plan unic perpendicular într-un punct pe o dreaptă.

Teorema 3.1.5. Două drepte perpepndiculare pe un plan sunt paralele.

Definiția 3.1.3. Fie un plan α şi trei perpendiculare necoliniare A, B, C. Dacă *D* este un punct ce nu aparține planului α, atunci planele (DAB), (DBC), (DAC) vor intersecta α după triunghiul ABC. Mulțimea punctelor interioare triunghiurilor DAB, DBC, DAC, ABC reunită cu mulțimea punctelor segmentelor [AB], [BC], [CA]; [DA], [DB], [DC], formează tetraedrul DABC sau ABCD.



Elementele tetraedrului:

- vârfurile: A, B, C, D
- fețele tetraedrului: ΔDAB, ΔDAC, ΔDBC, ΔABC

- muchiile tetraedrului: [DA], [DB], [DC], [AB], [AC], [BC]
- baza tetraedrului: ΔABC, dar oricare faţă poate fi baza
- înălţimea este perpendiculara din vârf pe bază.

Tetraedrul regulat este tetraedrul cu toate muchiile congruente.

Definiţia 3.1.4. Fiind dat un poligon convex $A_1A_2\ldots A_n$ conţinut într-un plan α şi un punct V ce nu aparţine lui α, interioarele triunghiurilor V A_1A_2, V A_2A_3, …, V $A_{n-1}A_n$, reunite cu interiorul poligonului convex dat şi cu mulţimea punctelor segmentelor $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, …, $[A_nA_1]$; $[VA_1]$, …, $[VA_n]$; formează o piramidă de bază $A_1A_2\ldots A_n$ şi vârf V.

Definiţia 3.1.5. Fie α şi β două plane paralele şi un poligon $A_1A_2\ldots A_n$, situat în planul α şi o dreaptă d ce intersectează α într-un singur punct. Prin fiecare punct *P* al poligonului $A_1A_2\ldots A_n$ construim un segment PP' paralel cu *d* şi $P' \in \beta$. Mulţimea punctelor *P'* formează în planul β un poligon $A'_1A'_2\ldots A'_n$ congruent cu $A_1A_2\ldots A_n$.

Mulţimea tuturor segmentelor PP' reunită cu mulţimea punctelor interioare celor două poligoane convexe congruente se numeşte PRISMĂ.

Elementele prismei:

* bazele prismei sunt poligoanele: $A_1A_2\ldots A_n$ şi $A'_1A'_2\ldots A'_n$
* feţele laterale sunt paralelogramele: $A_1A_2\,A'_2A'_1$; …; $A_nA_1\,A'_1A'_n$
* **muchiile laterale** sunt segmentele: $[A_1A'_1]$; $[A_2A'_2]$; …; $[A_nA'_n]$
* **muchiile bazelor** sunt segmentele: $[A_1A_2]$; $[A_2A_3]$; …; $[A_nA_1]$; $[A'_1A'_2]$; $[A'_2A'_3]$; …; $[A'_nA'_1]$
* **înălţimea prismei** este distanţa dintre baze.

Prisma dreaptă este prisma care are înălţimea egală cu lungimea muchiei laterale.

Paralelipipedul este prisma care are toate feţele paralelograme.

Paralelipipedul dreptunghic este prisma cu toate feţele dreptunghiuri.

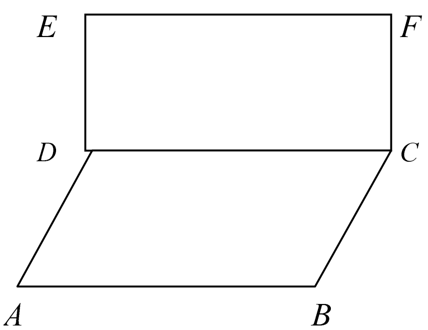
Cubul este paralelipipedul dreptunghic cu toate muchiile congruente.

Probleme rezolvate

R3.2.1. Dreptunghiurile ABCD şi CDEF sunt situate în plane diferite.

Demonstraţi că:

1) $CD \perp (ADE)$
2) $m(\widehat{CD;\ AE}) = 90^o$
3) $AB \perp (BCF)$



Soluţie:

1) ABCD dreptunghi $\Rightarrow CD \perp AD$
   CDEF dreptunghi $\Rightarrow CD \perp DE$
   $\Rightarrow CD \perp (ADE)$.
2) Din $\left.\begin{array}{l} CD \perp (ADE) \\ AE \subset (ADE) \end{array}\right| \Rightarrow CD \perp AE \Rightarrow m(\angle(CD;AE)) = 90^0$

3) $CD \perp CF$ (CDEF dreptunghi)

$CD \perp BC$ (ABCD dreptunghi) $\Rightarrow CD \perp (BCF)$

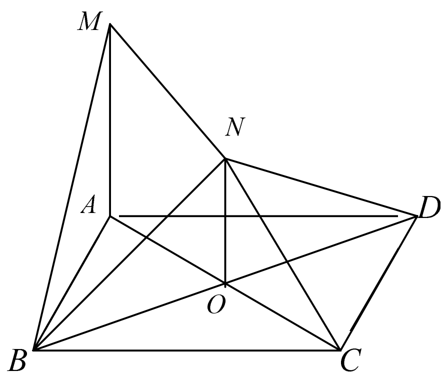
Din $CD \perp (BCF)$

$AB \,||\, CD \Rightarrow AB \perp (BCF)$

R3.2.2. În vârful A al dreptunghiului ABCD se ridică perpendiculara MA pe planul dreptunghiului.

1) Dacă N este mijlocul segmentului [MC], arătați că $MA \,||\, (NBD)$
2) Demonstrați că $BC \perp (MAB)$
3) Demonstrați că $NO \perp CD$
4) Arătați că punctul N este egal depărtat de vârfurile dreptunghiului ABCD.

Soluție:



1) $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow$

$AO = OC$

$MN = NC \Rightarrow$ [NO] l.m în Δ MAC

$\Rightarrow NO \,||\, MA$

$NO \subset (BND) \Rightarrow MA \,||\, (BND)$

2) ABCD dreptunghi $\Rightarrow BC \perp AB$

$MA \perp (ABCD)$

$BC \subset (ABCD) \quad \Rightarrow MA \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (MAB)$.

3) Din $NO \,||\, MA$ și $MA \perp (ABCD) \Rightarrow NO \perp (ABCD)$

$CD \subset (ABCD) \Rightarrow NO \perp CD$

4) În ΔAMC, AN este mediană $\Rightarrow AN = NC = \dfrac{MC}{2}$ (1)

Din $BC \perp (MAB) \Rightarrow BC \perp MB \Rightarrow \Delta MBC$ este dreptunghic și BN este mediană $\Rightarrow$

$\Rightarrow BN = \dfrac{MC}{2}$ (2)

Analog în ΔMDC avem $DN = \dfrac{MC}{2}$ (3)

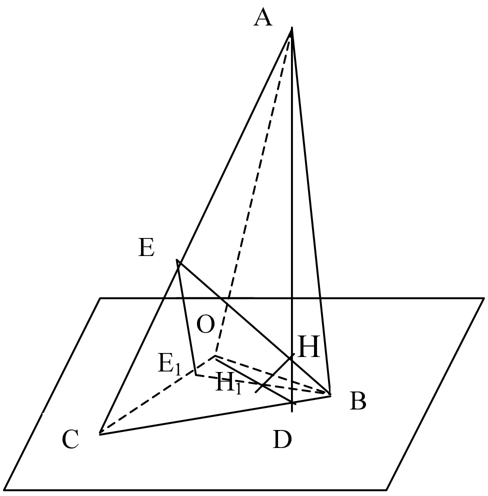
Din relația (1), (2), (3) $\Rightarrow NA = NB = NC = ND$.

R3.2.3. Dintr-un punct A exterior planului α se duc, perpendiculara AO și oblicele AB și AC față de acest plan. Fie H, H_1 ortocentrele triunghiurilor ABC și OBC, [AD] și [BE] înălțimi în triunghiul ABC, iar BE_1 înălțime în triunghiul OBC, $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $E_1 \in (OC)$.

Demonstrați că:

1) $BC \perp (AOD)$;

2) $BE_1 \perp (AOC)$;
3) $AC \perp (BEE_1)$;
4) $HH_1 \perp (ABC)$;
5) $\dfrac{OA}{AD} \cdot \dfrac{DH_1}{H_1B} \cdot \dfrac{BE}{EE_1} = 1$.



Soluție:

1) $BC \perp AD$ (ip.) (1)

$\left.\begin{array}{l} AO \perp \alpha \\ BC \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp OA \quad (2)$

Din rel. (1) și (2) $\Rightarrow BC \perp (AOD)$

2) $BE_1 \perp OC$ (ip.) (3)

$\left.\begin{array}{l} AO \perp \alpha \\ BE_1 \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AO \perp BE_1 \quad (4)$

Din rel. (3) și (4) $\Rightarrow BE_1 \perp (AOC)$

3) Din $BE_1 \perp (AOC) \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} AC \perp BE_1 \\ AC \perp BE \text{ (ip.)} \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (BEE_1)$

4) Avem $BC \perp (AOD)$ și $HH_1 \subset (AOD) \Rightarrow BC \perp HH_1$ (5)

Din $AC \perp (BEE_1)$ și $HH_1 \subset (BEE_1) \Rightarrow AC \perp HH_1$ (6)

Din rel. (5) și (6) $\Rightarrow HH_1 \perp (ABC)$.

5) $HH_1 \perp (ABC) \Rightarrow \Delta HH_1D$ dreptunghic

$\left.\begin{array}{l} AO \perp (OBC) \\ OD \subset (OBC) \end{array}\right\} \Rightarrow AO \perp OD \Rightarrow \Delta AOD$ dreptunghic

$\begin{array}{l} \Delta DH_1H \\ \Delta DAO \end{array} \left\{\begin{array}{l} \hat{O} \equiv \hat{H} \ (90^0) \\ \hat{D} \text{ comun} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DH_1H \sim \Delta DAO$

$\Rightarrow \dfrac{OA}{HH_1} = \dfrac{AD}{H_1D} \Rightarrow \dfrac{OA}{AD} = \dfrac{HH_1}{H_1D} \quad (7)$

Triunghiul BH_1H este dreptunghic pentru că $HH_1 \perp (ABC)$, $BH \subset (ABC)$ $\Rightarrow HH_1 \perp BH$.

Din $BE_1 \perp (AOC)$ și $EE_1 \subset (AOC) \Rightarrow BE_1 \perp EE_1 \Rightarrow \Delta BEE_1$ dreptunghic.

Triunghiurile dreptunghice BH_1H și BEE_1 au unghiul $\hat{B}$ comun, deci sunt asemenea, rezultă că $\dfrac{BE}{H_1B} = \dfrac{EE_1}{HH_1}$ (8).

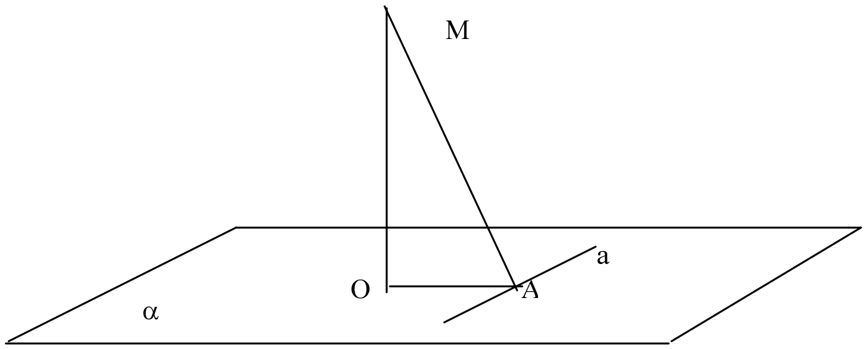
Înmulțim relațiile (7) și (8) membru cu membru și obținem:

$\dfrac{OA}{AD} \cdot \dfrac{BE}{H_1B} = \dfrac{HH_1}{H_1D} \cdot \dfrac{EE_1}{HH_1} \Big| \cdot \dfrac{DH_1}{EE_1}$ după înmulțire obținem:

$\dfrac{OA}{AD} \cdot \dfrac{BE}{EE_1} \cdot \dfrac{DH_1}{H_1B} = 1.$

3.2.Teorema celor trei perpendiculare

Teorema 3.2.1.(Teorema celor trei perpendiculare)



Fie α un plan,M un punct,$M \notin \alpha$ şi a o dreaptă,$a \subset \alpha$.

Dacă $MO \perp \alpha$, $O \in \alpha$ si $AO \perp a$,$A \in a$,atunci $MA \perp a$.

Teorema se utilizează la determinarea distanţei de la un punct la o dreaptă si determinarea perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă.

Ipoteza teoremei contine trei propoziţii:(2) $MO \perp \alpha$; (1) $OA \perp a$; (3) $a \subset \alpha$. Schimbînd oricare dintre cele trei propoziţii cu concluzia teoremei obţinem trei reciproce.

Teorema 3.2.2. (Reciproca(1))

Dacă

$MO \perp \alpha$, $O \in \alpha$
$MA \perp a$, $A \in a$
$a \subset \alpha$

atunci $OA \perp a$

Teorema 3.2.3. (Reciproca (2))

Dacă

$a \subset \alpha$
$OA \perp a$
$A \in a$, $O \in \alpha$
$MA \perp a$
$MO \perp OA$

atunci $MO \perp \alpha$

Reciproca a II-a este folosită pentru a determina distanţa de la un punct la un plan.Ea arată existenţa perpendicularei dintr-un punct pe un plan şi cum se construieşte aceasta folosind perpendicularitatea dreptelor.

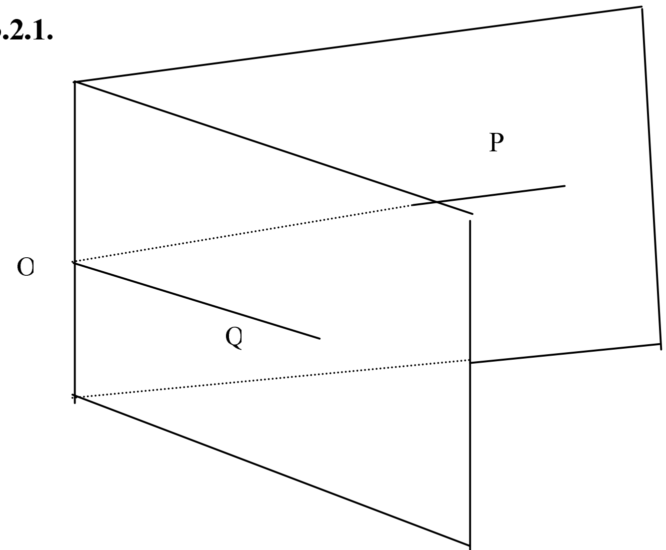
Teorema 3.2.4. (Reciproca (3))

Dacă

$MO \perp \alpha$, $O \in \alpha$
$MA \perp a$, $A \in a$
$OA \perp a$

atunci $a \subset \alpha$

Definiția 3.2.1.



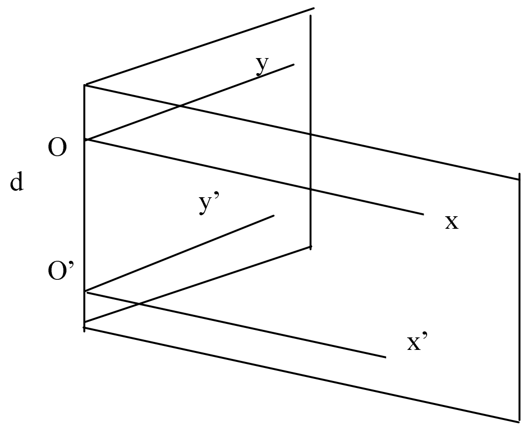
Reuniunea punctelor unei drepte d cu punctele a două semiplane mărginite de dreapta d se numeşte unghi diedru.

- d – muchia diedrului
- semiplanele sunt fețele diedrului

Dacă $O \in d$ şi prin O construim un plan α, perpendicular pe d, atunci intersecția unghiului diedru cu planul α se numeşte unghi plan corespunzător diedrului.

Teorema 3.2.5. Două unghiuri plane ale aceluiaşi unghi diedru sunt congruente

Demonstrație



Fie $\angle xOy$ şi $\angle x'O'y'$ două unghiuri plane corespunzătoare aceluiaşi unghi diedru.

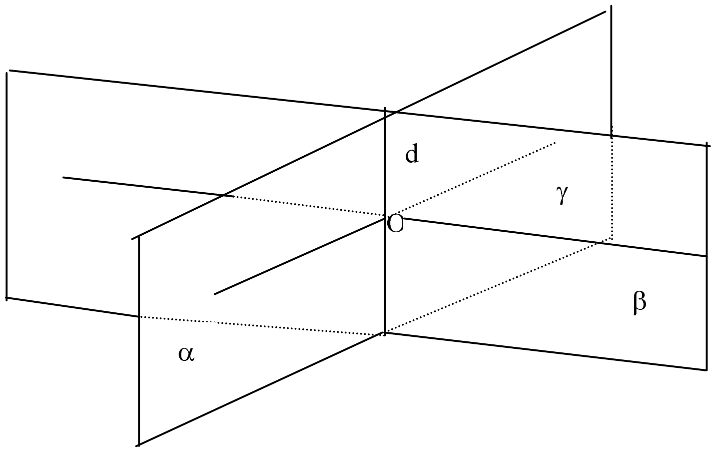
Din $d \perp (xOy) \Rightarrow d \perp Ox$ şi $d \perp Oy$

Din $d \perp (x'O'y') \Rightarrow d \perp O'x'$ şi $d \perp O'y'$

Ox şi O'x' coplanare ; Oy şi O'y' coplanare

Dacă $d \perp Ox$ şi $d \perp O'x' \Rightarrow Ox || O'x'$ (1)
Dacă $d \perp Oy$ şi $d \perp O'y' \Rightarrow Oy || O'y'$ (2)
Din (1) şi (2) $\Rightarrow \angle xOy \equiv \angle x'O'y'$ (au laturile paralele)
Definiția 3.2.2. Măsura unui unghi diedru este măsura oricărui unghi plan corespunzător unghiului diedru.
Cum determinăm unghiul plan corespunzător diedrului ?
1) *Se determină punctul O pe muchia diedrului în mod convenabil*
2) *Construim în O perpendicularele pe muchie în fiecare semiplan*
3) *Unghiul dintre cele două perpendiculare este unghiul plan corespunzător diedrului.*

Definiția 3.2.3. Dacă două plane sunt concurente atunci ele formează patru unghiuri diedre. Cea mai mică dintre măsurile celor patru unghiuri se numeşte unghiul celor două plane



$\alpha \cap \beta = d$, α şi β determină 4 unghiuri diedre. Prin O ducem planul $\gamma \perp d$. Atunci intersecția diedrelor cu planul γ sunt unghiuri plane corespunzătoare fiecărui diedru.

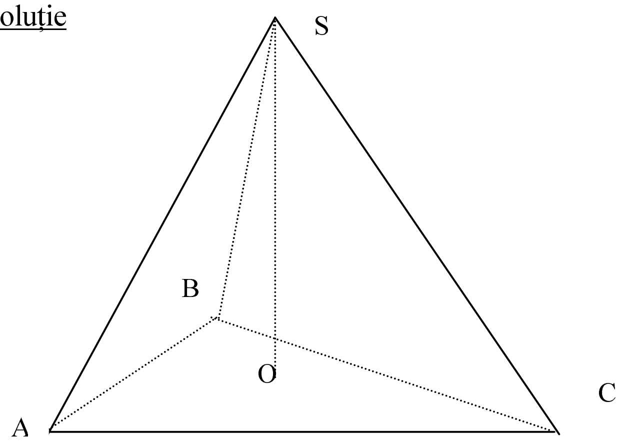
Dacă măsura unui unghi este a , $0 < a \leq 90^0$, atunci celelalte au măsura de 180^0-a; a ;180^0-a.

Probleme rezolvate

R3.5.1. Fie un triunghi ABC cu laturile AB=9 cm, AC=10 cm, BC=11 cm. Un punct S care nu aparține planului (ABC) este aşezat în spațiu astfel încât SA=SB=SC=12 cm.

Să se afle:
1. Distanța de la S la planul (ABC)
2. Distanța de la S la dreapta BC
3. Unghiul format de planul (SBC) şi (ABC)

Soluție



1) SA=SB=SC (ip)

Ducem SO⊥(ABC), O∈(ABC)

⇒ O este centrul cercului circumscris ΔABC⇒d(S;(ABC))=SO, pentru a determina pe SO avem nevoie de raza cercului circumscris ΔABC

$$R = \frac{abc}{4S} \;;\; S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{10+9+11}{2} = 15 \;;\; p-a = 6; p-b = 5; p-c = 4 \Rightarrow S = 30\sqrt{2}$$

$$R = \frac{9\cdot 10\cdot 11}{4\cdot 30\sqrt{2}} = \frac{33\sqrt{2}}{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} SO\perp(ABC) \\ OC\subset(ABC) \end{array}\right| \Rightarrow SO\perp OC \Rightarrow SOC \text{ dreptunghic. Din T.P.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SO^2 = SC^2 - OC^2 = 12^2 - \left(\frac{33\sqrt{2}}{8}\right)^2 \Rightarrow SO = \frac{3\sqrt{782}}{8}$$

2) Pentru a determina distanța de la S la dreapta BC, ducem în planul (ABC), OE⊥BC. Avem:

$$\left.\begin{array}{r} SO\perp(ABC) \\ OE\perp BC \\ OE\subset(ABC) \\ BC\subset(ABC) \end{array}\right\} \text{DinT3}\perp \Rightarrow SE\perp BC \Rightarrow d(S;BC) = SE$$

(d(S ;BC)= distanța de la S la BC)

$$\left.\begin{array}{r} SO\perp(ABC) \\ OE\subset(ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow SO\perp OE \Rightarrow \Delta SOE \text{dr.DinT.P.} \Rightarrow SE^2 = SO^2 + OE^2$$

OE mediatoarea lui [BC]

$\Rightarrow \Delta OEC dr.. Din T.P. \Rightarrow OE^2 = OC^2 - CE^2 = R^2 - \frac{121}{4}$

$SE^2 = \frac{7038}{64} - \left(R^2 - \frac{121}{4}\right) = \frac{4860 + 121 \cdot 16}{64} = \frac{6796}{64}$

$SE = \frac{\sqrt{6796}}{8}$

3.)Din

$$\left.\begin{array}{l} OE \perp BC \\ SE \perp BC \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$m(\angle((SBC);(ABC))) = m(< (OE;SE)) = m(\angle(SEO))$

ΔSOE dr. în O $\Rightarrow$ $\sin E = \frac{SO}{SE}$

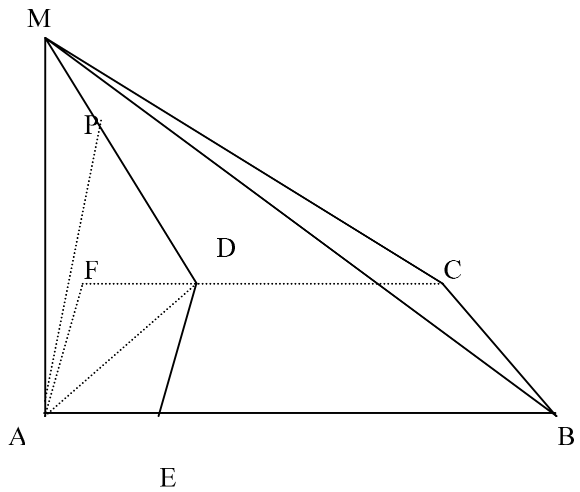
$$\sin E = \frac{\frac{3\sqrt{782}}{8}}{\frac{\sqrt{6796}}{8}} = \frac{3\sqrt{782}}{\sqrt{6796}}$$

R3.5.2. Pe planul trapezului isoscel ABCD,cu AB||CD, AB>CD, AB=24cm, m(B)=60^0 şi diagonala trapezului este bisectoarea unghiului ascuțit, se ridica perpendiculara AM,AM=6cm.

Sa se afle:

1) aria trapezului si diagonalele;
2) d(M;BC) si d (M;CD) ;
3) m($\angle$((MCD) ;(ABC))) ;
4) d(A ;(MCD)) ;

Soluție



1) În trapezul ABCD (BD –bisectoarea $\angle B \Rightarrow \angle DBA \equiv \angle DBC$ (1)

Din $AB \parallel CD$ si BD sec. $\Rightarrow \angle BDC \equiv \angle DBA$ (2)

Din (1) si (2) $\Rightarrow \angle BDC \equiv \angle DBC \Rightarrow \Delta BDC$ isoscel $\Rightarrow BC=CD=DA$

In $\Delta ABD, m(\angle A)=60^0$ si $m(\angle B)=30^0 \Rightarrow m(\angle D)=90^0 \Rightarrow AD \perp BD$ şi $AD=\dfrac{AB}{2} \Rightarrow AD=12=DC=BC$.

Ducem $DE \perp AB \Rightarrow$ in ΔADE avem $DE=6\sqrt{3}$

$A_{ABCD}=\dfrac{(B+b)\cdot h}{2}$;$A_{ABCD}=108\sqrt{3}\text{ cm}^2$

In ΔABD de in D avem $\sin 60^0=\dfrac{BD}{AB}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{BD}{24} \Rightarrow 12\sqrt{3}=AC$.

$$\left.\begin{array}{l} 2)MA \perp (ABCD) \\ AC \perp BC \\ AC \subset (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \end{array}\right| \text{Din T3}\perp \Rightarrow MC \perp BC \Rightarrow d(M;BC)=MC$$

$MA \perp (ABCD) \Rightarrow MA \perp AC \Rightarrow \Delta MAC$ dr. în A $\Rightarrow MC^2=MA^2+AC^2=$
$=6^2+(12\sqrt{3})^2=6\sqrt{13}$

$$\left.\begin{array}{l} MA \perp (ABCD) \\ AF \perp CD,\ F \in CD \\ AF \subset (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{array}\right| \text{Din T3}\perp \Rightarrow MF \perp CD \Rightarrow d(M;CD)=MF$$

$MA \perp (ABC) \Rightarrow MA \perp AF \Rightarrow \Delta MAF$ dr. $\Rightarrow MF=\sqrt{MA^2+AF^2}=12$

3) $(MCB) \cap (ABC)=BC$

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp CB \\ MC \perp CB \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m(\angle ((MCD);(ABC)))=m(\angle MCA)$$

In ΔMAC dr. în A avem $tgC=\dfrac{6}{12\sqrt{3}}$ $\quad tgC=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Pentru a determina distanţa de la punctul A la planul (MCD) aplicăm reciproca teoremei celor trei perpendiculare.

$$\text{Ducem } \left.\begin{array}{l} AP \perp MF \\ P \in MF \\ PF \perp CD \\ AF \perp CD \end{array}\right\} \text{Din RT3}\perp \Rightarrow AP \perp (MCD)$$

$\Rightarrow d(A;(MCD)) = AP$.

AP înălțime în ΔMAF dr. în A $\Rightarrow AP=\frac{c_1.c_2}{ip}$; $\Rightarrow$ $AP=3\sqrt{3}.$

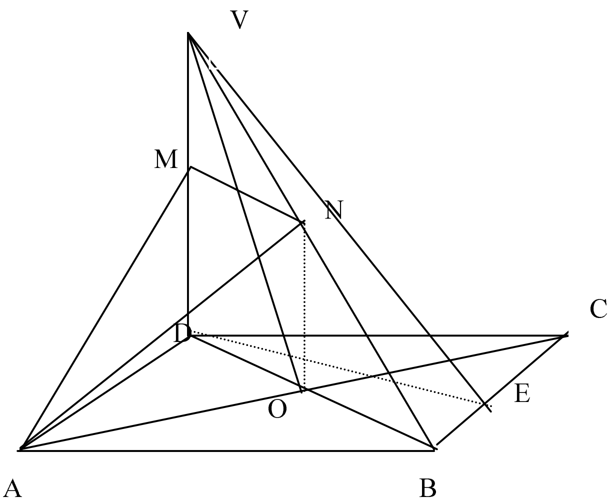
R3.5.3. Pe planul rombului ABCD de latură a şi diagonală $AC=a\sqrt{3}$ se ridică perpendiculara DV=a. Fie M şi N mijloacele segmentelor [VD] şi [VB]. Să se afle:

1) d(V;BC)

2) d(D;(VAC))

3) m($\angle$((AMN);(ABC)))

Soluție:



1) $\left.\begin{array}{c} ABCD-\text{romb} \\ AB=a \\ AC=a\sqrt{3} \\ AC\bigcap BD=\{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow AO=OC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

În ΔAOD dr. $\overset{\text{T.P.}}{\Longrightarrow}$ $\begin{array}{l} OD=\sqrt{AD^2-AO^2} \\ OD=\frac{a}{2}\Rightarrow BD=2OD=a \end{array}$ $\Rightarrow\Delta$BCD echilateral.

Pentru a determina distanța de la M la BC ducem DE$\perp$BC şi avem:

$\left.\begin{array}{c} VD\perp(ABCD) \\ DE\perp BC, E\in BC \\ DE\subset(ABCD) \\ BC\subset(ABCD) \end{array}\right\} \overset{\text{T.3.}\perp}{\Longrightarrow} VE\perp BC\Rightarrow d(V;BC)=VE$

$VD\perp(ABCD)\Rightarrow VD\perp DE\Rightarrow\Delta VDE$ dr. $\overset{\text{T.P.}}{\Rightarrow} VE=\sqrt{VD^2+DE^2}\Rightarrow VE=\frac{a\sqrt{7}}{2}$

2) Aplicăm T.3.$\perp$. şi avem:

$$\left.\begin{array}{r} VD\perp(ABCD) \\ DO\perp AC \\ DO\subset(ABCD) \\ AC\subset(ABCD) \end{array}\right\} \overset{T.3.\perp}{\Rightarrow} VO\perp AC$$

Aplicăm reciproca T.3.$\perp$ şi obținem:

$$\text{Ducem } \left.\begin{array}{r} DF\perp VO \\ EO\perp AC \\ DO\perp AC \end{array}\right\} \overset{R.T.3.\perp}{\Rightarrow} DF\perp(VAC) \Rightarrow d(D;(VAC)) = DF$$

DF inalțime in $\Delta VDO \Rightarrow DF=\dfrac{c_1\cdot c_2}{ip}$;$DF=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

$VO=\sqrt{VD^2+DO^2}$

$VO=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ (T.P.in Δ dreptunghic VDO)

3) În ΔVDB , NO l.m.$\Rightarrow NO\parallel VD$,dar $VD\perp(ABCD)\Rightarrow NO\perp(ABCD)$

$$\left.\begin{array}{r} AO\perp BD(ip) \\ AO\perp NO(NO\perp(ABCD)) \end{array}\right\} \Rightarrow AO\perp(DMN)$$

Aplicam T.3.$\perp$ si avem:

$$\left.\begin{array}{r} AO\perp(DMN) \\ ON\perp MN \\ ON\subset(DMN) \\ MN\perp(DMN) \end{array}\right\} \Rightarrow (T.3.\perp)\ AN\perp MN$$

Determinăm (dreapta)muchia diedrului.

$$\left.\begin{array}{l} MN\,||\,BD \\ A\in(MNA)\cap(ABC) \\ A\in d \text{ şi } d\,||\,BC\,||\,MN \end{array}\right| \Rightarrow (MNA)\cap(ABC)=d$$

Determinăm unghiul plan corespunzător diedrului

$$\left.\begin{array}{l} \text{Din } AN\perp MN,\ MN\,||\,d \Rightarrow AN\perp d \\ \quad AO\perp BD,\ BD\,||\,d \Rightarrow AO\perp d \end{array}\right|$$

$m(\angle((AMN);(ABC)))=m(\angle NAO)$

În ΔNAO dr. în O $\Rightarrow$ $tgA=\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow m(\angle A)=30^0$

3.3. Plane perpendiculare

Definiția 3.3.1. Două plane concurente sunt perpendiculare dacă determină un unghi diedru drept.

Notăm : $\alpha \perp \beta$

Teorema 3.3.1. Două plane sunt perpendiculare dacă unul conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt.

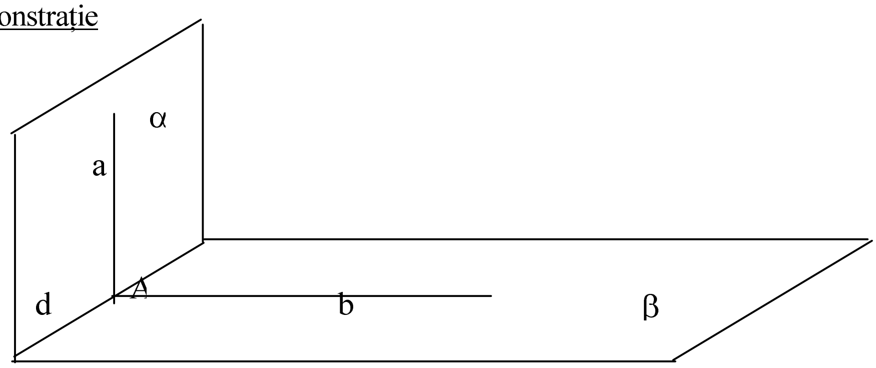
Dacă $d \subset \beta$ şi $d \perp \alpha \Rightarrow \beta \perp \alpha$

Teorema 3.3.2. Dacă două plane sunt perpendiculare atunci orice dreaptă conținută în unul dintre ele şi perpendiculară pe dreapta lor de intersecție este perpendiculară pe celălalt plan.

Dacă $a \subset \alpha$ şi $a \perp d, \alpha \cap \beta = d$ atunci $a \perp \beta$.

Teorema este utilă cînd trebuie să demonstrăm că o dreaptă este perpendiculară pe un plan.

Demonstrație



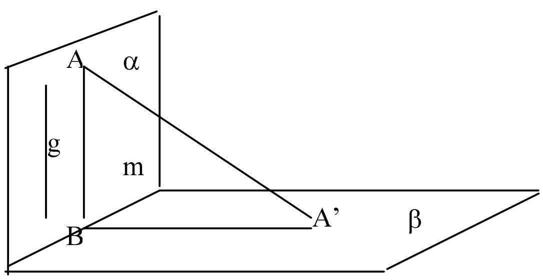
Fie $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = d, a \perp d, a \cap d = \{A\}$

Ducem dreapta $b, b \subset \beta$ şi $b \perp d, b \cap d = \{A\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = d \\ a \perp d \\ b \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow m(\angle \alpha; \beta) = m(\angle a; b) = 90^\circ$$

$\Rightarrow a \perp b$,dar $a \perp d, b \subset \beta, d \subset \beta \Rightarrow a \perp \beta$

Teorema 3.3.3. Dacă două plane sunt perpendiculare şi dintr-un punct oarecare al unuia ducem o perpendiculară pe celălalt,atunci ea este conținută în întregime în primul plan.



Demonstrație

$A \in \alpha$

$m = \alpha \cap \beta$

Fie $AA' \perp \beta$, presupunem că $AA' \not\subset \alpha$, dar $\alpha \perp \beta \Rightarrow (\exists)$ în α o dreaptă g perpendiculară pe $\beta \Rightarrow$ g este perpendiculară pe orice dreaptă din β.

Ducem prin A dreapta d paralelă cu g. Şi ea va fi perpendiculară pe toate dreptele din β.

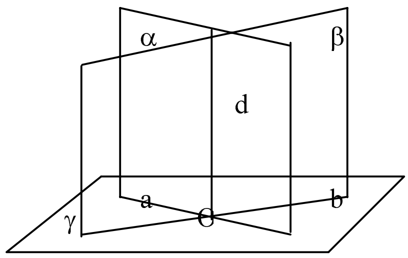
$d \cap m = \{B\}$

În planul (AA'B) există două drepte AB şi AA' perpendiculare pe BA', contradicție pentru că AB şi AA' sunt concurente, rămâne situația cînd $A \in g$, dar atunci problema este rezolvată.

Probleme rezolvate

R3.8.1. Fie α si β două plane neparalele si perpendiculare pe planul γ, atunci dreapta lor de intersecție este perpendiculară pe γ.

Soluție



$\alpha \cap \beta = d$

$\alpha \perp \gamma, \alpha \cap \gamma = a$

$\beta \perp \gamma, \beta \cap \gamma = b$

$\alpha \cap b = \{0\}$

Presupunem ca $d \not\perp \beta$

Din $\alpha \perp \gamma \Rightarrow$ există o dreapta $d' \subset \alpha$, $d' \perp a$ în O, cum $\alpha \perp \gamma \Rightarrow d' \perp \gamma$

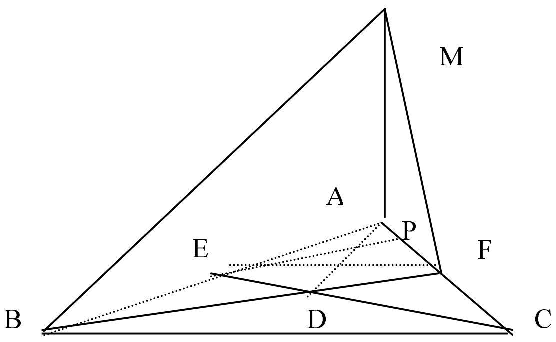
Din $\beta \perp \gamma \Rightarrow$ există în β o dreaptă $d'' \perp b$ in punctul O, $d'' \subset \beta$, dar $\beta \perp \gamma \Rightarrow d'' \perp \gamma$, contradicție, în O se pot duce două drepte d' si d" perpendiculare pe $\gamma \Rightarrow$ presupunere este falsă $\Rightarrow d' = d'' = d$.

R3.8.2. Fie triunghiul echilateral ABC. Pe laturile AB şi AC se iau punctele E şi F astfel încît AE =2BE si CF = 2AF. Dreptele BF şi CE se intersectează în D.

Pe perpendiculara în A pe planul (ABC) se ia punctul M astfel încât MA=AB=a.

1) Să se arate că $(EFM) \perp (FAM)$
2) Determinați măsura unghiului dintre planele (CDM) şi (DAM);
3) Determinați distanța de la pct. M la EF.

Soluție



1) În ΔAEF, m($\angle A$)=60° şi AE=2AF=$2\dfrac{a}{3}$; AF=$\dfrac{a}{3}$

Ducem EP $\perp$ AF $\Rightarrow$ Δ EAP dreptunghic

şi m($\angle A$)=60° $\Rightarrow$ m($\angle E$)=30° $\Rightarrow$ AP=AE/2=$\dfrac{a}{3}$,dar AF=$\dfrac{a}{3}$ $\Rightarrow$ P =F $\Rightarrow$ EF $\perp$ AC (1)

$$\left.\begin{array}{r}\text{din } MA\perp(ABC)\\ EF\subset(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow EF\perp MA\ (2)$$

Din relațiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ EF $\perp$ (MAC)

Dar (MAC)=(MAF) $\Rightarrow$ EF $\perp$ (MAF) şi EF $\subset$ (MEF) $\Rightarrow$ (MEF) $\perp$ (MAF)

2)Arătăm că planele sunt $\perp$

ΔBAF

$$\Delta CBE\left\{\begin{array}{c}(BE)\equiv(AF)ip\\ (BC)\equiv(AB)ip\\ \angle(B)\equiv\angle(A)(60°)\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta BAF\equiv\Delta CBE\Rightarrow m(\angle BCE)=m(\angle ABF$$

),dar $m(\angle ABF)+m(\angle FBC)=60°\Rightarrow m(\angle FBC)+m(\angle BCE)=60°$, atunci în ΔBDC, $m(\angle D)=180^0-(m(\angle FBC)+m(\angle BCE))=120^0\Rightarrow m(\angle EDF)=120^0$,

dar $m(\angle EAF)=60^0\Rightarrow$ $m(\angle EDF)+m(\angle EAF)=180^0\Rightarrow$AEDF patrulater inscriptibil şi $m(\angle EFA)=90^0\Rightarrow m(\angle ADE)=90^0$ (unghiuri formate de diagonale cu lat.op.)$\Rightarrow$ AD$\perp$CE (3).

Din MA$\perp$(ABC), CE$\subset$ (ABC)$\Rightarrow$CE$\perp$MA (4)

Din relațiile (3) şi (4) $\Rightarrow$ CE$\perp$(MAD), dar CE$\subset$ (MDC)$\Rightarrow$(MDC)$\perp$(MAD)
$\Rightarrow m(\angle((MDC);(MAD)))=90^0$.

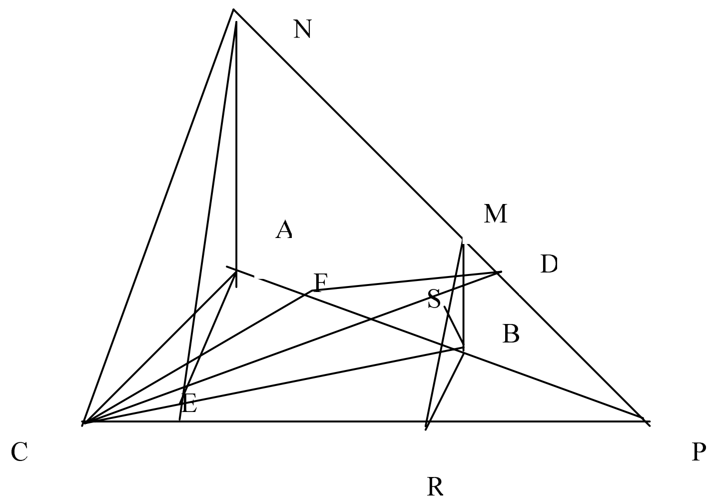
3) Aplicăm T3$\perp$ şi obținem:

$$\left.\begin{array}{l}MA\perp(BAC)\\ AF\perp EF\\ EF,AF\subset(ABC)\end{array}\right|\text{Din } T3\perp\Rightarrow MF\perp EF\Rightarrow d(M;EF)=MF$$

$MA\perp(AEF) \Rightarrow MA\perp AE \Rightarrow \Delta MAF$ dr. Din T.P.$\Rightarrow$ $MF=\dfrac{a\sqrt{10}}{3}$

R3.8.3. Fie triunghiul echilateral ABC si trapezul dreptunghic ABMN , având unghiurile drepte în A şi B situate în plane perpendiculare astfel încât AB=8 cm, AH=12 cm,
BM=6 cm. Sa se afle:

1) d(N;BC)
2) d(C;MN)
3) tg ($\angle$(ABC);(CMN))
4) d(B;(CMH))



Solutie

Arătăm că NA este perpendiculară pe planul (ABC)

$$1)\ \left.\begin{array}{r}(ABC)\perp(ABMN)\\ (ABC)\cap(ABMN)=AB\\ NA\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow NA\perp(ABC)$$

Aplicam T.3.$\perp$. si obtinem:

$$\left.\begin{array}{r}NA\perp(ABC)\\ AE\perp BC, E\in BC\\ AE\subset(ABC)\\ BC\subset(ABC)\end{array}\right\}\text{Din T3}\perp\Rightarrow NE\perp BC\Rightarrow d(N;BC)=NE$$

In ΔNAE dr. în A .Din T.P$\Rightarrow NE=\sqrt{NA^2+AE^2}=\sqrt{12^2+\left(\dfrac{8\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$

$=\sqrt{144+48}=8\sqrt{3}$

AE=h Δ echilateral $\Rightarrow AE = \frac{8\sqrt{3}}{2}$

2) Ducem din C perpendiculara CF pe AB. Cum planele (ABC) si (ABMN) sunt perpendiculare şi CF este perpendiculară pe dreapta lor de intersecție rezultă că $CF \perp (ABMN)$

Aplicam teorema celor trei perpendiculare si obtinem:

$$\left.\begin{array}{l} CF\perp(ABMN) \\ FD\perp MN \\ MN, FD\subset (ABMN) \end{array}\right| \text{Din T3}\perp \Rightarrow CD \perp MN \Rightarrow d(C;MN) = CD.$$

$MN \cap AB = \{P\}$

In $\Delta ANP, BM \parallel AN$ si $BM=\frac{AN}{2} \Rightarrow BM$ l.m. $\Rightarrow AB = BP = 8$

Triunghiurile FDP şi NAP sunt asemenea pentru că $\angle D \equiv \angle A$ (20^0) şi $\angle$ P este comun $\Rightarrow \frac{FP}{NP} = \frac{FD}{AN}$

În Δ dreptunghic ANP Din T.P. $\Rightarrow NP = \sqrt{NA^2 + AP^2} = \sqrt{256+144} = 20$

Înlocuim in proportia de mai sus si obtinem : $\frac{12}{20} = \frac{FD}{12} \Rightarrow FD = \frac{12\cdot 12}{20} = \frac{36}{5}$

În ΔCFD dreptunghic in F Din T.P. $\Rightarrow CD=\sqrt{CF^2 + FD^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (\frac{36}{5})^2}$

$CD=\frac{8\sqrt{39}}{5}$

3) $(ABC)\cap(CMN)=CP$

Triunghiul CBP isoscel (CB=BP=8cm) şi $m(\angle CBP) = 120°$;$(180° - m(\angle ABC))$

$\Rightarrow m(\angle BCP) = \frac{180^0 - 120^0}{2} = 30°$,atunci $m(\angle ACP) = 60° + 30° = 90° \Rightarrow AC \perp CP$.

Folosind T.3.⊥. punem în evidență unghiul plan corespunzător diedrului.

$$\left.\begin{array}{c} NA\perp(ABC) \\ AC\perp CP \\ CP \subset (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{array}\right\} \text{Din T3}\perp \Rightarrow NC\perp CP \Rightarrow m(\angle(CMN);(ABC))) = m(\angle NCA)$$

În ΔNCA dr. în A $\Rightarrow tgC = \frac{NA}{AC} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

4) Pentru a determina d(B;(CMN)) vom folosi reciproca t.3.⊥.

$$\left.\begin{array}{r} MB\perp(ABC) \\ BR\perp CP, R\in CP \end{array}\right\} \text{Din} T3\perp \Rightarrow MR\perp CP$$

$$\text{Ducem } \left.\begin{array}{r} BS\perp MR \\ SR\perp CP \\ BR\perp CP \end{array}\right\} \text{ Din R.T.3}\perp \Rightarrow BS\perp(CMN) \Rightarrow d(B;(CMN)) = BS$$

BS înălțime în Δ dreptunghic BRM $\Rightarrow BS = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}; BS = \frac{BM \cdot BR}{MR} = \frac{6 \cdot 4}{2\sqrt{13}}$

$BS = \frac{12\sqrt{13}}{13}$

[BR] l.m. în $\Delta ACP \Rightarrow BR = \frac{AC}{2} = 4cm$

Triunghiul MBR dr. în B .Din T.P. $\Rightarrow MR = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

3.4. Proiecții

Tema va cuprinde proiecția unui punct pe o dreaptă şi a unui segment pe o dreaptă, lungimea proiecției unui segment pe o dreaptă, proiecția unui punct pe un plan,a unei drepte pe un plan,unghiul unei drepte cu un plan,lungimea proiecției unui segment pe un plan şi aria proiecției unei figuri pe un plan.

Proiecții pe o dreaptă

Definiția 3.4.1.

Se numeşte proiecție a unui punct pe o dreaptă d,piciorul perpendicularei dusă din P pe dreapta d.

Fie dreapta d şi punctul P a.î. $P\notin d$:Ducem PP'⊥d$\Rightarrow$P' = $Pr_d(P)$ (P' este proiecția lui P pe d).

Observație : Dacă $P\in d \Rightarrow Pr_d(P) = P$

Teorema 3.4.1.

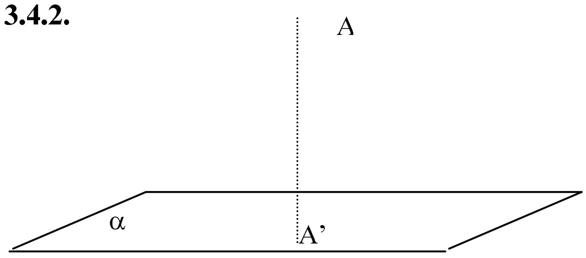
Lungimea proiecției A'B' a unui segment AB pe o dreaptă d este egală cu lungimea segmentului înmulțită cu cosinusul unghiului dintre d şi dreapta ce conține segmentul

$$A'B' = AB \cdot \cos(\angle AB; A'B')$$

Convenim să considerăm:1°) .cos 0°=1 ;2°).cos 90°=0

Proiecții pe un plan

Definiția 3.4.2.



Proiecția ortogonală a unui punct A pe un plan α este piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe plan.

Fie planul α şi punctul A,a.î. $A \notin \alpha$.

Ducem $AA' \perp \alpha$ atunci $A' = Pr_{\alpha}(A)$ (A' este proiecția lui A pe α).

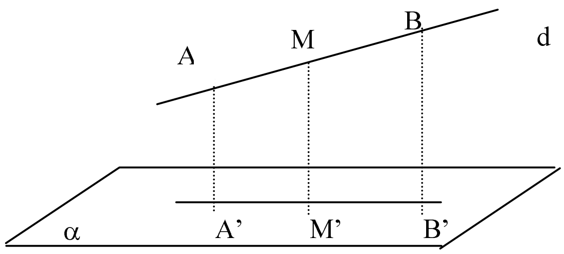
Observație: Dacă $A \in \alpha \Rightarrow Pr(A) = A$

Definiția 3.4.3.

Se numeşte proiecția unei figuri geometrice pe un plan figura geometrică formată din proiecțiile punctelor figurii pe acel plan.

Teorema 3.4.2.

Proiecția unei drepte pe un plan este o dreapta sau un punct.



<u>Demonstrație</u>

Fie planul α şi dreapta d a.î. d nu este perpendiculară pe α.

Fie A şi B pe d şi $AA' \perp \alpha$; $BB' \perp \alpha$; A'şi $B' \in \alpha$ atunci dreapta A'B' este proiecția lui d pe planul α.Pentru a justifica acest fapt demonstrăm că proiecția oricărui punct $M \in d$ este situat pe A'B'.

Dacă M' este proiecția lui M pe α, arătăm că $M' \in A'B'$.

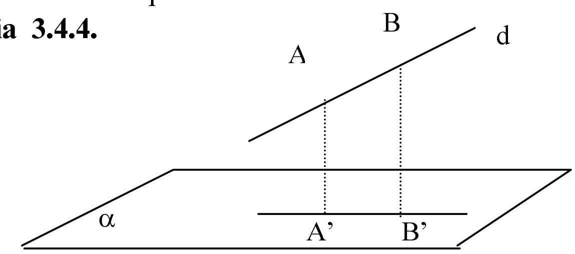
$AA' \| BB'$(perpendiculare pe α) $\Rightarrow$ ele determină planul β si pt. că $AA' \perp \alpha \Rightarrow \beta \perp \alpha$

$M \in d \subset \beta \Rightarrow M \in \beta$ rezultă că perpendiculara dusă din M pe planul α este conținută în β, deci M' aparține dreptei de intersecție planelor α siβ. $\Rightarrow M' \in A'B'$

Dacă $d \perp \alpha$ atunci proiecția este un punct.

Teorema 3.4.3. Proiecția unui segment pe un plan este un segment pe un plan este un segment sau un punct.

Definiția 3.4.4.



Unghiul unei drepte cu un plan este numit unghiul format de acea dreaptă cu proiecția ei pe plan.

Fie dreapta d şi planul α, iar A şi B

Două puncte situate pe d $AA' \perp \alpha$; $BD' \perp \alpha$

$A', B' \in \alpha \Rightarrow A'B' = pr_{\alpha}(AB) \Rightarrow m(\angle(AB;\alpha)) = m(\angle(AB; A'B'))$ sau

$M(\angle(d;A'B'))$

Obs.1^0.daca $d \perp \alpha$ atunci $m(\angle(d;\alpha)) = 90^0$.

2^0. dacă $d \| \alpha$ atunci $m(\angle(d;\alpha)) = 0^0$

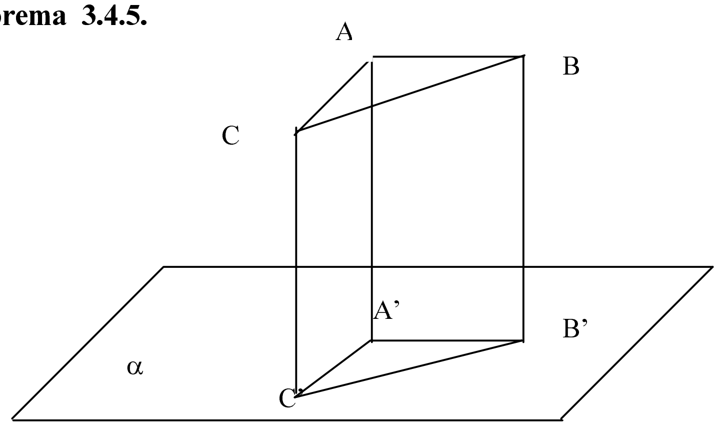
rezultă că unghiul dintre o dreaptă şi un plan are măsura cuprinsă între 0^0 şi 90^0.

Teorema 3.4.4. Lungimea proiecției plan este egală cu produsul dintre lungimea segmentului şi cosinusul unghiului dintre dreapta suport a segmentului şi planul respectiv.

Convenim să considerăm: $1^0.\cos 90^0 = 0$

$2^0.\cos 0^0 = 1$

Teorema 3.4.5.



Aria proiecției A'B'C' a unui triunghi ABC pe un plan α este egală cu aria triunghiului ABC înmulțită cu cosinusul unghiului dintre planele(ABC) şi α.

Fie u=m$\angle((ABC);\alpha)$

Fie ΔABC şi $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$; $CC' \perp \alpha$; $A', B', C' \in \alpha$ atunci $\Delta A'B'C' = Pr_{\alpha}(\Delta ABC)$

$$A_{A'B'C'} = A_{ABC} \cdot \cos u$$

Dacă $u = 0^0$ atunci $A_{A'B'C'} = A_{ABC} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

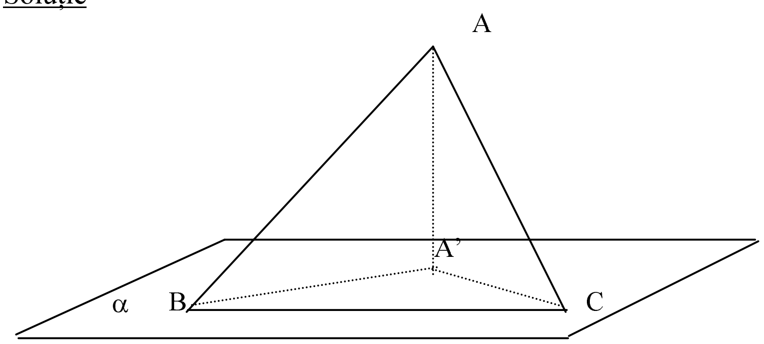
Dacă $u = 90^0$ atunci ΔABC se proiectează după un segment.

Teorema este utilizată la determinarea unghiului dintre două plane când nu avem determinată muchia diedrului şi unghiul plan corespunzător lui.

Probleme rezolvate

R3.11.1. Un triunghi ABC cu AB = 8 cm, BC = 5 cm; AC = 7 cm are latura BC inclusă în planul α. Să se afle aria proiecției triunghiului pe plan ştiind că proiecția este un triunghi dreptunghic.

Soluție



Ducem $AA' \perp \alpha \Rightarrow$

$A' = pr_{\alpha}(A)$

B şi $C \in \alpha$ => proiecțiile lor sunt B şi C, deci $\Delta A'BC$ este proiecția ΔABC pe planul α. Triunghiul A'BC dreptunghic.

1) Fie $A'B \perp BC$ atunci $\left.\begin{matrix} AA' \perp \alpha \\ A'B \perp BC \\ BC \subset \alpha \\ A'B \subset \alpha \end{matrix}\right\} \overset{T.31}{\Rightarrow} AB \perp BC$ imposibil $7^2 \neq 8^2 + 5^2$

Analog arătăm că $A'C \perp BC$ atunci triunghiul A'BC este dreptunghic în A'.

Din Δ AA'B de $\overset{T.P.}{\Rightarrow}$ $AA'^2 = AB^2 - A'B^2 = 8^2 - A'B^2 = 8^2 - x^2$ (1)

Notăm: A'B = x şi A'C = y

Din Δ AA' dr. $\overset{T.P.}{\Rightarrow}$ $AA'^2 = AC^2 - A'C^2 = 7^2 - y^2$ (2)

Din rel. (1) şi (2) $\Rightarrow$ $8^2 - x^2 = 7^2 - y^2$, iar din Δ A'BC dr. în A' avem conform T.P că $x^2 + y^2 = 25^2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 8^2 - x^2 = 7^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ -x^2 + y^2 = -7 \end{cases} \Big| +$$

$2y^2 = 18 \,|: 2$

$y^2 = 9$

$y = 3$

Înlocuind în prima ecuaţie obţinem x= 4.

$$A_{A'BC} = \frac{A'B \cdot A'C}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm.}$$

R3.11.2. Fie ABC un triunghi dreptunghic şi isoscel. Vârful A se găseşte într-un plan α, iar catetele AB şi AC formează cu planul α unghiuri congruente. Fie B'şi C' proiecţiile vârfurilor B şi C pe planul α.

1) Să se demonstreze că (BC)≡(B'C')

2) Care este valoarea maximă pe care o poate avea unghiul u format de catetele AB şi AC cu planul α.

3) Să se demonstreze că unghiul C'AB' nu poate fi ascuţit.

4) Să se afle unghiul diedru format pe planul triunghiului cu planul α când m $(\angle(AB;\alpha)) = 30^0$.

<u>Soluţie</u>

1) Δ ABB'

$$\Delta ACC' \left\{ \begin{array}{c} (AB) \equiv (AC) ip \\ \angle(CAC') \equiv \angle(BAB') ip \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABB' \equiv \Delta ACC'$$

$\Rightarrow$(BB') $\equiv$(CC')

$$\left. \begin{array}{c} C' = Pr_\alpha(C) \\ B' = Pr_\alpha(B) \\ A \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AC' = Pr_\alpha(AC);$$

$(AB') = Pr_\alpha(AB) \Rightarrow m(\angle(AC;\alpha)) = m\angle(CAC')$ şi

$m(\angle(AB;\alpha)) = m\angle(BAB') \Rightarrow$ avem $m\angle(CAC') = m\angle(BAB') = u$

2) Fie AB = AC = a atunci BC = $a\sqrt{2}$. Din BB $||$ CC' şi (BB') $\equiv$(CC') $\Rightarrow$ BCC'B' dreptunghi (BB' $\perp \alpha$)$\Rightarrow$ B'C' = $a\sqrt{2}$

AB'=a cos u ; AC'=a cos u

În ΔAC'B' avem AB'+AC'>B'C'

acos u +acos u >$a\sqrt{2}$

$2a\cos u > a\sqrt{2}$

$\cos u > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u<45^0$

AB'+AC'=BB'C' numai în cazul când A,B', C' sunt coliniare, atunci $u=45^0$.În aceste condiții planul triunghiului este perpendicular pe planul α.

3) Fie AD' înălțimea triunghiului isoscel AB'C' (AB'=AC' din (1))

(AD' bisectoare $D'C'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

În $\Delta AC'D'$ avem: $\sin C'AD'=\frac{D'C'}{AC'}=\frac{a\sqrt{2}}{2}:a\cos u=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\cos u}$

Deoarece $\cos u<1 \Rightarrow \frac{1}{\cos u}>1$, deci $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\cos u}>\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin C'AD'>\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow m(\angle C'AD')>45^0 \Rightarrow m(\angle C'AB')>2\cdot 45^0=90^0$.

Numai când $BC\subset\alpha$, B=B', C=C' și $\angle B'AC'$ este drept

4) $BC \| B'C'$, $B'C'\subset\alpha \Rightarrow BC \| \alpha$

atunci $(ABC)\cap\alpha=d$, $A\in d$ și $d \| BC \| B'C'$

$$\left.\begin{array}{l} D'A\perp B'C' \Rightarrow D'A\perp d \\ DA\perp BC \Rightarrow DA\perp d \end{array}\right\} \quad m((\angle ABC);\alpha)) = m(\angle DAD')$$

$\Delta ADD'$ dr.în D' avem $\sin A = \frac{DD'}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m(\angle DAD') = 45°$

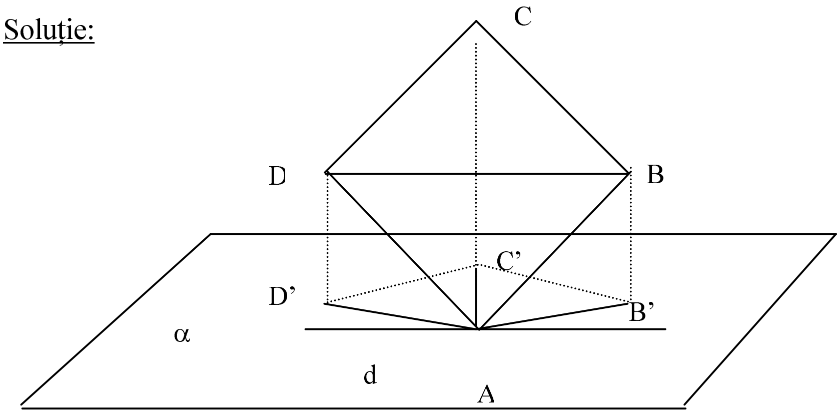
Dacă $n=30° \Rightarrow BB' = \frac{a}{2} = DD'$

Din ΔABD avem $AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

R3.11.3. Fie ABCD un pătrat.Vîrful A se găsește într-un plan α și laturile AB și AD formează cu planul unghiuri congruente.Se notează cu B', C', D' proiecțiile punctelor B,C,D pe planul α.

1) Ce relație există între dreapta BD și planul α?
2) Ce fel de patrulater este $AB'C'D'$?
3) $AB = a, \angle BAB' = 30°$. Să se afle AC'.
4) Să se afle $m((\angle ABCD);\angle\alpha)$

Soluție:



$$\left.\begin{array}{l} B' = Pr_{\alpha}(B) \\ D' = Pr_{\alpha}(D) \end{array}\right\} \Rightarrow A \in \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} AD' = Pr_{\alpha}(AD) \\ AB' = Pr_{\alpha}(AB) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} m(\angle AB; \angle\alpha) = m(\angle BAB') \\ m(\angle AD; \angle\alpha) = m(\angle DAD') \end{array}\right\} \Rightarrow m(\angle BAB') = m(\angle DAD') = u$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABB' \\ \Delta ADD' \end{array}\left\{\begin{array}{l} (AB) \equiv (AD) \\ \angle DAD' \equiv \angle BAB' \\ \end{array}\right.\right\} \Rightarrow \Delta ABB' \equiv \Delta ADD' \Rightarrow DD' = BB' \text{ şi } DD' \,||\, BB'$$

(sunt perpendiculare pe același plan)

$$\left.\begin{array}{l} BDD'B' \text{paralelogram} \\ \Rightarrow BB' \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow BDD'B' \text{dreptunghi} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow B'D' \,||\, BD \\ B'D' \subset \alpha \end{array}\right| BD \,||\, \alpha \Rightarrow$$

2) $AB \,||\, CD$
$AD \,||\, BC$

Dreptele paralele au proiecțiile paralele $\Rightarrow$ $C'D' \,||\, AB'$ şi $AD' \,||\, B'C' \Rightarrow AB'C'D'$ paralelogram şi $AB' = AD' \Rightarrow AB'C'D'$ este romb.

3) ABCD pătrat , AB=a, $\Rightarrow BD = a\sqrt{2} \Rightarrow B'D' = a\sqrt{2}$

Din $\Delta ABB' \Rightarrow AB' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Fie $AC' \cap B'D' = \{0\}$. Din triunghiul dreptunghic AOB' aplicând T.P.$\Rightarrow AO^2 = AB'^2 - B'O^2 = \frac{3a^2}{4} - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$

$AO = \frac{a}{2} \Rightarrow AC' = a$.

4) $BD \| \alpha$ planele se intersectează după o dreaptă d care trece prin A şi $d \| BD \| B'D'$.

$$\left.\begin{array}{l} AC' \perp B'D' \Rightarrow AC' \perp d \\ AC \perp BD \Rightarrow AC \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow m(< ((ABCD);\alpha)) = m(< CAC')$$

$\Delta CAC'$ dreptunghic $\Rightarrow \cos A = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \cos A = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m < (A) = 45°$.

3.5. Tetraedre particulare

Tema va cuprinde proprietăţi referitoare la înălţimi, mediane, bimediane, mediatoare în tetraedru şi proprietăţi speciale referitoare la tetraedrele ortocentrice, echifaciale respectiv tridreptunghice şi ea constituie un suport în pregătirea concursurilor de matematică.

În geometria în spaţiu tetraedrul are rolul triunghiului din geometria plană. Multe din proprietăţile tetraedrului pot fi deduse prin analogie cu proprietăţile triunghiului.

În studiul corpurilor geometrice, introducerea noţiunii de volum se poate face folosind definirea volumului cubului sau a tetraedrului. Deducerea volumului paralelipipedului dreptunghic se face uşor dacă dimensiunile lui sunt numere naturale, dar problema se complică atunci când dimensiunile paralelipipedului sunt numere raţionale sau iraţionale. Prin folosirea volumului tetraedrului se evită demonstraţiile care implică numărul iraţional şi pe baza lui se pot deduce volumele celorlalte corpuri geometrice.

Definiţia 3.5.1

Fie A, B, C trei puncte necoliniare situate în planul α şi D un punct exterior planului α, atunci planele (DAB), (DAC), (DBC) vor intersecta planul α după triunghiul ABC.Mulţimea punctelor interioare triunghiurilor DAB, DBC, DAC, ABC reunită cu mulţimea punctelor segmentelor [AB], [BC], [CA], [DA], [DB], [DC], formează tetraedrul DABC.

Elementele tetredrului:

- Vârfurile sunt punctele A,B,C,D
- Feţele sunt triunghiurile ABC, DAB, DAC, DBC

- Muchiile sunt segmentele [AB], [AC], [BC], [DA], [DB], [DC]
- Baza tetraedrului este oricare dintre fețele sale

Definiția 3.5.2.

Se numește înălțime a unui triunghi (tetraedru)

a) dreapta ce trece printr-un vârf al triunghiului (tetraedrului) și este perpendiculară pe latura (fața) opusă.

b) segmentul determinat pe dreapta de la punctul a) de către vârful considerat și de punctul de intersecție a dreptei suport a laturii (planului feței) opuse, numit piciorul înălțimii

Observații:

1)În propoziții ca: "înălțimile sunt concurente" ne referim la drepte, iar expresia "lungimea înălțimii" ne obligă să considerăm înălțimea un segment.

2) În general înălțimile unui tetraedru nu sunt concurente.

Teorema 3.5.1.

Lungimile înălțimilor unui triunghi sunt invers proporționale cu cele ale laturilor.

Definiția 3.5.3.

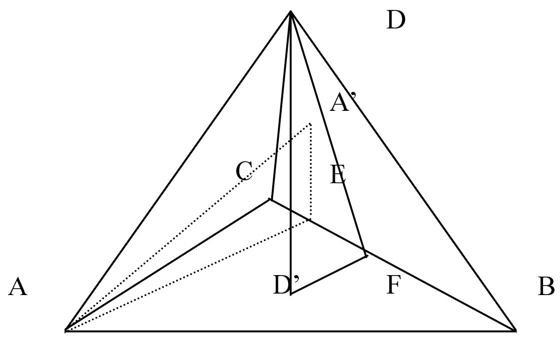
Aria ΔABC o notăm $A_{ABC} = \dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{b \cdot h_b}{2} = \dfrac{c \cdot h_c}{2}$, unde BC=a, AC=b, AB=c , h_a - înălțimea corespunzătoare vârfului A, analog h_b, h_c .

Teorema 3.5.2.

Înălțimile unui tetraedru sunt invers proporționale cu ariile fețelor corespunzătoare.

Demonstrație

Fie tetraedrul ABCD



Ducem $AA' \perp (BCD)$, $A' \in (BCD)$ și $A'E \perp BC$

$DD' \perp (ABC)$, $D' \in (ABC)$ și $D'F \perp BC$

Folosind T3$\perp \Rightarrow AE \perp BC$ și $DF \perp BC$

Avem $DF \parallel A'E$ și $AE \parallel D'F \Rightarrow \Delta DD'F$ și $\Delta AA'E$ sunt asemenea având $m(\angle A')=m(\angle D')=90^0$ și $\angle E \equiv \angle F$ (au laturile paralele) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{DD'}{AA'} = \frac{DF}{AE} \Rightarrow DD' \cdot AE = AA' \cdot DF \,\Big|\cdot \frac{1}{2}BC \;\Rightarrow DD' \cdot \frac{AE \cdot BC}{2} = AA' \cdot \frac{DF \cdot BC}{2}$$

$$\Rightarrow DD' \cdot A_{ABC} = AA' \cdot A_{BCD}$$

Definiția 3.5.4. Prin volumul tetraedrului ABCD înlelegen numărul V_{ABCD}, definit prin relația :

$$V_{ABCD}=\frac{A_{ABC}\cdot DD'}{3}=\frac{A_{BCD}\cdot AA'}{3}=\frac{A_{ABD}\cdot CC'}{3}=\frac{A_{ACD}\cdot BB'}{3},$$ unde A’,B’,C’, D’ sunt picioparele înălțimilor corespunzătoare vârfurilor A,B,C respectivD

Teorema 3.5.3.

Aria unui triunghi ABC este dată de formula

$$\mathbf{A_{ABC}=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{bc\sin A}{2}}=\frac{ac\sin B}{2}$$

Teorema 3.5.4.

Volumul unui tetraedru ABCD poate fi calculat cu formula:

$$\mathbf{V_{ABCD}=\frac{2\cdot A_{ABC}\cdot A_{BCD}\cdot \sin(\angle((ABC);(BCD)))}{3}}$$

<u>Demonstrație</u>

Ducem AA’$\perp$(BCD)

A’$\in$(BCD) ; A’E$\perp$BC. Din T3$\perp\Rightarrow$ AE$\perp$BC$\Rightarrow$ m($\angle$((ABC);(DBC)))=m($\angle$AEA’)

În ΔAA’E dreptunghic în A’ $\sin E=\frac{AA'}{AE}\Rightarrow AA'=AE\cdot\sin E\,\big|\cdot BC$

$\Rightarrow AA'\cdot BC=AE\cdot BC\cdot\sin E\Rightarrow AA'\cdot BC=2A_{ABC}\cdot\sin E\big|\cdot A_{BCD}$

$\Rightarrow AA'\cdot BC\cdot A_{BCD}=2A_{ABC}\cdot A_{BCD}\cdot\sin E\quad(1)$

Dar $AA'\cdot A_{BCD}=3\cdot V_{ABCD}$, înlocuind în relația (1) aceasta devine:

$$BC\cdot 3\cdot V_{ABCD}=2\cdot A_{ABC}\cdot A_{BCD}\cdot\sin E\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{2\cdot A_{ABC}\cdot A_{BCD}\sin E}{3BC}$$

Teorema 3.5.5.

Cele trei mediatoare ale unui triunghi sunt concurente într-un punct O care este egal depărtat de vârfurile triunghiului

<u>Observație</u>

1) *Punctul de intersecție al mediatoarelor triunghiului se numeşte <u>centrul cercului circumscris triunghiului</u>.*
2) *Perpendiculara pe planul triunghiului în centrul cercului circumscris se numeşte <u>mediatoarea triunghiului.</u>*

Definiția 3.5.4.

Fie A şi B două puncte distincte. <u>Planul mediator</u> al segmentului [AB] este planul perpendicular pe dreapta AB care trece prin mijlocul segmentului [AB]

Teorema 3.5.6.

Cele șase plane mediatoare ale muchiilor unui tetraedru sunt concurente într-un punct care este egal depărtat de vârfurile tetraedrului.

Demonstrație

Fie α_{BC}, planul mediator al segmentului [BC] şi α_{AC}, planul mediator al segmentului [AC], ele sunt concurente pentru că dreptele BC şi AC sunt concurente. Intersecțiile lui α_{BC} şi α_{AC} cu planul (ABC) sunt mediatoarea lui [BC] respectiv mediatoarea lui [AC].Pentru că planele sunt perpendiculare pe planul (ABC), dreapta de intersecție al lor este perpendiculară pe planul (ABC) şi trece prin centrul cercului circumscris triunghiului.

Definiția 3.5.5. Se numeşte mediană a unui triunghi segmentul de dreaptă determinat de un vârf al triunghiului şi mijlocul laturii opuse.

Teorema 3.5.7.

Medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct G situat pe fiecare mediană la $\frac{1}{3}$ de bază din lungimea medianei şi $\frac{2}{3}$ față de vârf.

Observație Punctul de intersecție al medianelor unui triunghi se numeşte centrul de greutate al triunghiului

Definiția 3.5.5.

Se numeşte mediană a unui tetraedru segmentul determinat de un vârf al tetraedrului şi centrul de greutate al feței opuse

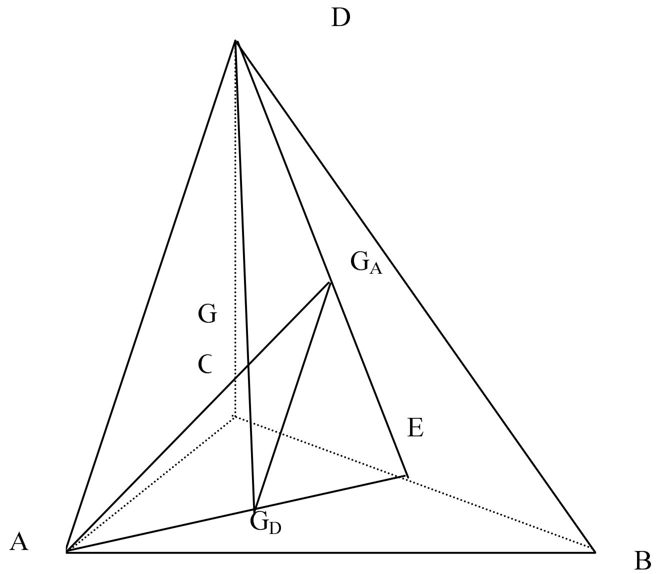
Definiția 3.5.6.

Se numeşte plan median, planul determinat de o muchie a tetraedrului şi mijlocul muchiei opuse.

Teorema 3.5.8.

Medianele unui tetraedru ABCD sunt concurente într-un punct G situat pe fiecare mediană la $\frac{1}{4}$ de bază din lungimea medianei şi la $\frac{3}{4}$ de vârf din lungimea ei.

Demonstrație



Fie tetraedrul ABCD , E mijlocul lui [BC], G_D- centrul de greutate al ΔABC şi G_A- centrul de greutate al ΔBCD. A,G_A, E,G_D ,D sunt coplanare. $AG_A \cap DG_D = \{G\}$.

$\dfrac{EG_A}{G_AD} = \dfrac{EG_D}{G_DA}$. Din R.T. Thales $\Rightarrow$ $G_AG_D \| AD$. Din T.F.A. $\Rightarrow$ $\Delta AGD \sim \Delta G_AGG_D$

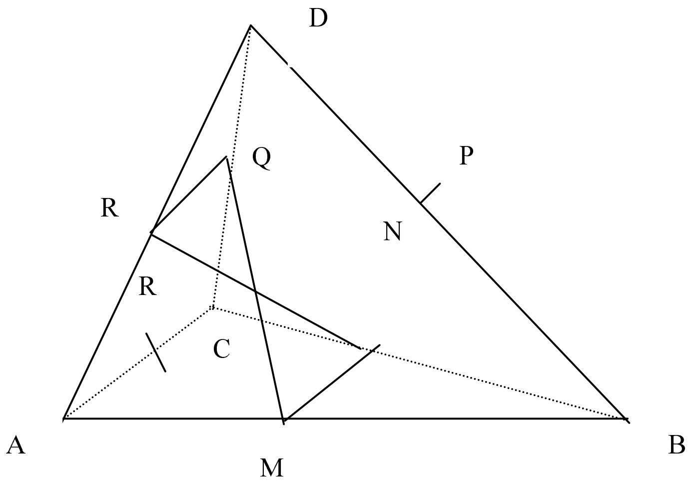
$\Rightarrow \dfrac{G_AG_D}{AD} = \dfrac{GG_A}{GA} = \dfrac{GG_D}{GD} = \dfrac{1}{3}$. Analog se arată că şi celelalte două mediane împart pe AG_D în acelaşi raport, deci ele sunt concurente. G – centrul de greutate al tetraedrului

Definiția 3.5.7.

Se numeşte <u>bimediană a unui tetraedru</u> segmentul de dreaptă determinat de mijloacele a două muchii opuse ale tetraedrului.

Teorema 3.5.9.

Bimedianele unui tetraedru sunt concurente în centrul de greutate, centrul de greutate fiind mijlocul fiecărei bimediane.



<u>Demonstrație</u>

Fie tetraedrul ABCD şi M,N,P,Q,R,S mijloacele muchiilor [AB], [BC], [BD], [CD], [AD] respectiv [AC].

[MN] l.m. în $\Delta ABC \Rightarrow MN \| AC$ şi $MN = \dfrac{AC}{2}$

[RQ] l.m. în $\Delta ACD \Rightarrow RQ \| AC$ şi $RQ = \dfrac{AC}{2}$

$\Rightarrow$ MNQR paralelogram $\Rightarrow$ [MQ] şi [RN] sunt concurente şi se înjumătățesc.

Analog se arată că [PR] trece prin mijlocul lui [MQ] , deci sunt concurente.

TETRAEDRUL ORTOCENTRIC

În general înălţimile unui tetraedru nu sunt două câte două secante, deci nici concurente.

Definiţia 3.5.8.

Un tetraedru în care cele 4 înălţimi sunt 4 drepte concurente se numeşte ortocentric sau ortogonal. Punctul lor de intersecţie se notează cu H şi se numeşte ortocentrul tetraedrului.

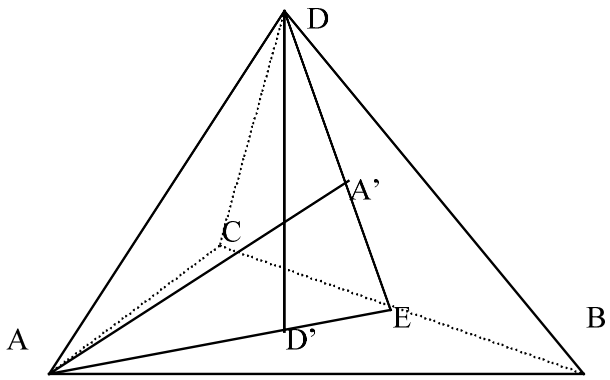
Teorema 3.5.10.

Înălţimile din A şi D ale tetraedrului ABCD sunt secante dacă şi numai dacă muchiile AD şi BC sunt perpendiculare (L'Huilier 1782)

Demonstraţie

Fie $A' = pr_{(BCD)}^{(A)}$ şi $D' = pr_{(ABC)}^{(D)}$

Condiţii echivalente: $AA' \cap DD' \neq \Phi \Leftrightarrow AD \perp BC$



$\boxed{\Rightarrow}$ Dacă AA' şi DD' sunt secante.

$AA' \perp (BCD) \Rightarrow AA' \perp BC$

$DD' \perp (ABC) \Rightarrow DD' \perp BC$. Din cele două relaţii rezultă $BC \perp (ADD') \Rightarrow BC \perp AD$

$\boxed{\Leftarrow}$ Fie E piciorul perpendicularei din A pe BC.Notăm planul $(AED)=\beta$. Din $BC \perp AD$ şi $BC \perp AE \Rightarrow BC \perp \beta$. Cum $AA' \perp BC$ şi $DD' \perp BC \Rightarrow$ AA' şi DD' sunt incluse în planul β pentru că perpendicularele duse din A şi D pe BC se află în planul β, deci sunt secante pentru că sunt înălţimi în ΔAED

Consecinţa 1^0

Dacă înălţimile AA' şi DD' sunt secante atunci şi celelalte două înălţimi BB' şi CC' sunt secante.

Demonstrație

Din $AA' \cap DD' \neq \varnothing \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow BB' \cap CC' \neq \varnothing$

Consecința 2^0

Dacă $AA' \cap BB' = \{H\}$, atunci perpendiculara comună a muchiilor [AD] şi [BC] conține punctul H

Demonstrație

Planul determinat de dreptele AA' şi DD' intersectează pe BC în E, EH este cea de-a treia înălțime a ΔAED, deci $EH \perp AD$, dar $BC \perp (AED) \Rightarrow BC \perp EH$ pentru că $EH \subset (AED)$.

Din $BC \perp EH$ şi $AD \perp EH \Rightarrow$ consecința 2^0

Consecința 3^0

Dacă înălțimile AA' şi DD' se taie în H, iar înălțimile BB' şi CC' se taie în H' şi $H \neq H'$, atunci HH' este perpendiculara comună a muciilor opuse AD şi BC

Conform consecinței 2^0 , punctul H aparține perpendicularei comune dar şi H' aparțiene perpendicularei comune, atunci $HH' \perp AD$ şi $HH' \perp BC$

Consecința 4^0

Tetraedrul ABCD este ortocentric dacă şi numai dacă au loc condițiile: $AD \perp BC$, $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Cele trei condiții de perpendicularitate a muchiilor opuse, exprimă faptul că înălțimile tetraedrului sunt două câte două secante.

Teorema 3.5.11.

Înălțimile din A şi D Ale tetraedrului ABCD sunt secante dacă şi numai dacă are loc relația: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

Demonstrație

Fie $E = pr_{BC}(A)$ şi $F = pr_{BC}(D)$. Avem : $AB^2 - AC^2 = BE^2 - EC^2 =$

$= (BE + EC)(BE - EC) = BC(BE - EC)$

$BD^2 - CD^2 = BF^2 - FC^2 = (BF + FC)(BF - FC) = BC(BF - FC)$

Înălțimile AA' şi DD' ale tetraedrului sunt secante dacă şi numai dacă E=F. Conform egalităților de mai sus, dacă E=F atunci avem:

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2 \Rightarrow AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2.$$

Din relațiile de mai sus $\Rightarrow$ BC(BE – EC)=BC(BF – FC), deci BE – EC =BF+EF – EF – FC =BF+EF – (EF+FC), adică $2EF=0 \Rightarrow EF=0 \Rightarrow E=F$.

Consecința 1^0 (Feuerbach , 1827)

Tetraedrul ABCD este ortocentric dacă şi numai dacă

$$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2 = AD^2 + BC^2$$

Tetraedrul ABCD este ortocentric dacă şi numai dacă două dintre înălțimile AA', BB' , CC', DD' sunt secante. Conform teoremei 3.13.11. două înălțimi sunt secante dacă şi numai dacă are loc egalitatea de sume de pătrate de muchii opuse.

Consecința 2^0

Dacă au loc două dintre condițiile $AB \perp CD$, $AD \perp BC$, $AC \perp BD$ atunci are loc şi a treia

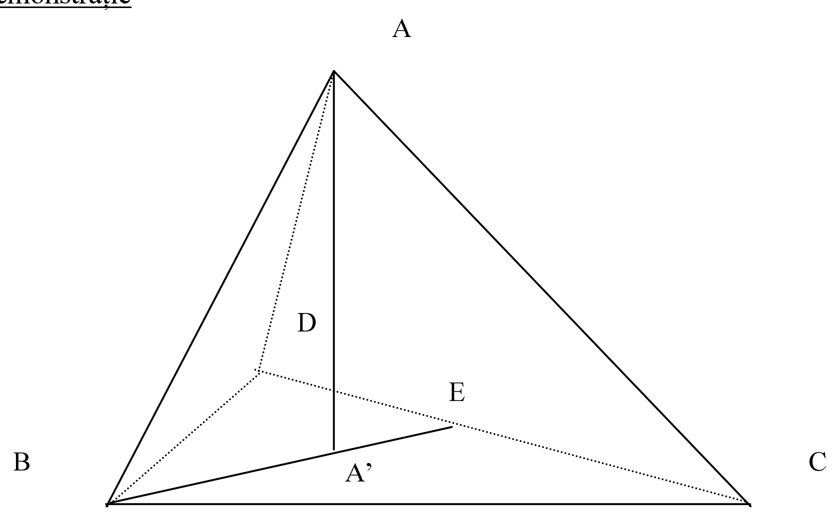
Consecința 3^0

Tetraedrul ABCD este ortocentric dacă şi numai dacă cele trei bimediane sunt egale.

TEOREMA 3.5.12. (Vecten , 1817)

Tetraedrul ABCD este ortocentric dacă şi numai dacă proiecția ortogonală A' a lui A pe planul (BCD) coincide cu ortocentrul Δ BCD.

Demonstrație



Dacă ΔBCD nu este dreptunghic atunci ortocentru său H_A nu coincide cu nici un vârf.

Condiții echivalente: $\left.\begin{array}{l} AB\perp CD \\ AC\perp BD \end{array}\right\} \Leftrightarrow A' = H_A$

Din $AB\perp CD$ şi $AA'\perp CD \Rightarrow CD\perp(AA'B) \Rightarrow$ $CD\perp BA'$, $BA'\cap CD=\{E\} \Rightarrow A' \in BH_A$

Din $AC\perp BD \Rightarrow A' \in CH_A$

Se observă că tetraedrul ABCD este ortocentric $\Leftrightarrow$ $AC\perp BD, AB\perp DC \Leftrightarrow A' \in BH_A$ şi $A' \in CH_A$ $\Leftrightarrow A'=H_A$

Observații

i) Dacă Δ BCD este dreptunghic în D $\Rightarrow H_A=D$, propoziția rămâne adevărată.

ii) Dacă Δ BCD este dreptunghic în B sau C este necesară o nouă reformulare a notațiilor.

iii) Mijloacele celor şase muchii ale unui tetraedru ortocentric se află pe o sferă de centru G şi rază egală cu lungimea unei jumătăți de bimediană, conform consecinței 3^0

TETRAEDRUL ECHIFACIAL

Numeroase proprietăţi ale triunghiului echilateral extinse în spaţiu, se îndeplinesc în tetraedre echifaciale. De aceea studiul acestor tetraedre este util pentru studiul interferenţei dintre geometria euclidiană plană şi geometria spaţiului tridimensional.

Definiţia 3.5.9.

Se numeşte "tetraedru echifacial" un tetraedru ale cărui feţe sunt echivalente.

Numeroase proprietăţi ale triunghiului echilateral, extinse în spaţiu, se îndeplinesc în tetradre echifaciale. De aceea studiul acestor tetraedre este util pentru studiul interferenţei dintre geometria euclidiană plană şi geometria spaţiului tridimensional.

Teorema 3.5.13.

Un tetraedru ABCD este echifacial dacă şi numai dacă cele patru înălţimi sunt egale.

Demonstraţie

Condiţii echivalente:

$A_{ABC} = A_{ACD} = A_{BCD} = A_{ABD} \Leftrightarrow h_A = h_B = h_C = h_D$, unde h_A este înălţimea corespunzătoare vârfului A.

"$\Rightarrow$"

$$V = \frac{h_A \cdot A_{BCD}}{3}; V = \frac{h_B \cdot A_{ACD}}{3} \Rightarrow \frac{h_A \cdot A_{BCD}}{3} = \frac{h_B \cdot A_{ACD}}{3}$$

$$\Rightarrow h_A = h_B$$

"$\Leftarrow$"

Din $h_A = h_B$ şi $V = \dfrac{h_A \cdot A_{BCD}}{3}; V = \dfrac{h_B \cdot A_{ACD}}{3} \Rightarrow A_{BCD} = A_{ACD}$

Lema 3.5.1.

Într-un tetraedru echifacial ABCD fiecare bimediană este perpendiculara comună a muchiilor ce le înjumătăţeşte.

Demonstraţie

Fie M mijlocul lui [AB] şi E,F,N proiecţiile ortogonale ale punctelor A, B, M pe muchia opusă CD. Dacă AM=MB$\Rightarrow$ EN=NF. Se observă că :

$AE \cdot CD = 2 \cdot A_{ACD} = 2 \cdot A_{BCD} = BF \cdot CD \Rightarrow$ AE=BF.

Din triunghiurile dreptunghice AEN şi BFN $\Rightarrow$ AN=NB. Deci în triunghiul isoscel NAB , mediana [MN] este şi înălţime, deci MN este perpendiculara comună a muchiilor AB şi CD. Dacă prin absurd, N nu ar coincide cu mijlocul M' al muchiei [CD], s-ar relua construcţia şi demonstraţia, schimbând rolul muchiilor [AB] şi [CD] şi am găsi o altă perpendiculară comună M'N' a muchiilor [AB] şi [CD], ceea ce este absurd.

Teorema 3.5.14.

Condiția necesară şi suficientă ca tetraedrul ABCD să fie echifacial este ca orice pereche de muchii opuse să fie egale.

"$\Rightarrow$"

Pe aceeaşi figură folosită în demonstrația lemei se observă că NE=NF şi ND=NC, deci ED=FC. $\Delta ADE \equiv \Delta BCF \Rightarrow [AD] \equiv [BC]$ şi se constată că $[CE] \equiv [FD]$, $\Delta AEC \equiv \Delta BFD \Rightarrow [AC] \equiv [BD]$.

"$\Leftarrow$"

Dacă muchiile opuse sunt egale, oricare ar fi două fețe ale tetraedrului se găseşte o corespondență a vârfurilor astfel încât triunghiurile să fie congruente conform cazului (L.L.L.), deci ariile triunghiurilor vor fi egale

Teorema 3.5.15.

Dacă în tetraedrul ABCD orice bimediană este perpendiculara comună a muchiilor ce le uneşte atunci tetraedrul este echifacial.

Demonstrație

Fie E şi F mijloacele muchiilor [AB] şi [CD]. Avem $EF \perp AB \Leftrightarrow AF=BF \Leftrightarrow 4AF=4BF$, obținem :

$$2(AC^2 - AD^2) - CD^2 = 2(BC^2 - BD^2) - CD^2 \text{ deci } AC^2 - BD^2 = BC^2 - AD^2 (1)$$

Analog din $EF \perp CD$ obținem : $BD^2 - AC^2 = BC^2 - AD^2$ (2)

Din relațiile (1) şi (2) $\Rightarrow$AC=BD

TETRAEDRUL TRIDREPTUNGHIC

Definiția 3.5.10.

Tetraedrul ABCD este tridreptunghic în D dacă oricare două dintre dreptele DA, DB, DC sunt perpendiculare.

Se observă uşor că un tetraedru tridreptunghic este şi ortocentric, deci are şi proprietățile tetraedrului ortocentric.Aceste tetraedre au însă şi proprietăți suplimentare ce generalizează într-un mod remarcabil relațiile metrice din triunghiul dreptunghic.

Teorema 3.5.16

Tetraedrul ABCD este tridreptunghic dacă şi numai dacă au loc egalitățile:

$$\mathbf{2 \cdot DA^2 = b^2 + c^2 - a^2; 2 \cdot DB^2 = a^2 - b^2 + c^2; 2 \cdot DC^2 = a^2 + b^2 - c^2}$$

Demonstrație

"$\Rightarrow$"

Dacă ABCD este tridreptunghic aplicăm T.P în ΔDBC, ΔDAC, ΔDAB şi obținem:

$a^2 = DB^2 + DC^2$;$b^2 = DA^2 + DC^2$;$c^2 = DA^2 + DB^2$

Adunăm egalitățile şi obținem :

$$DA^2+DB^2+DC^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Folosind relațiile de mai sus obținem egalitățile din enunț

"$\Leftarrow$"

Din $\begin{matrix} 2\cdot DA^2=b^2+c^2-a^2; \\ 2\cdot DB^2=a^2-b^2+c^2 \end{matrix}$ prin adunarea lor obținem

$DA^2+DB^2=c^2$. Din R.T.P.$\Rightarrow\Delta DAB$ dr. în D

Analog se arată că şi celelalte e triunghiuri sunt dreptunghice

Probleme rezolvate

R3.13.1. Demonstrați că într-un tetraedru echifacial cele patru mediane au lungimi egale

Demonstrație

Fie tetraedrul ABCD, [AE] şi [DE] mediane , $E\in[BC]$ iar G_D şi G_A, centrele de greutate ale fețelor ABC şi BCD. Notăm $DG_D=m_D$ mediana corespunzătoare vârfului D.

Aplicăm Teorema lui Stewart şi obținem:

$$m_D^2\cdot AE=DE^2\cdot AG_D+AD^2\cdot G_DE-AE\cdot AG_D\cdot G_DE$$

$$m_D^2\cdot AE=DE^2\cdot\frac{2AE}{3}+AD^2\cdot\frac{AE}{3}-AE\cdot\frac{2}{3}AE\cdot\frac{1}{3}AE$$

$$m_D^2=\frac{2}{3}DE^2+\frac{AD^2}{3}-\frac{2}{9}AE^2$$

Folosind teorema medianei pentru [DE] şi [AE] obțimen:

$$m_D^2=\frac{3(DC^2+BD^2+AD^2)-(BC^2+AC^2+AB^2)}{9}$$

Analog obținem:

$$m_A^2=\frac{3(AD^2+AC^2+AB^2)-(BC^2+BD^2+CD^2)}{9}$$

$$m_D^2=m_A^2$$

$$3DC^2+3BD^2+3AD^2-BC^2-AC^2-AB^2=3AD^2+3AC^2+3AB^2-BC^2-BD^2-CD^2$$

$$4DC^2+4BD^2=4AC^2+4AB^2\,|:4$$

$DC^2+BD^2=AC^2+AB^2$ (relație adevărată deoarece muchiile opuse sunt congruente)

Analog se arată că celelalte două mediane sunt congruente cu ele.

R3.13.2.Dacă ABCD este un tetraedru tridreptunghic în D şi H_D piciorul înălţimii din D pe faţa ABC, atunci H_D este ortocentrul triunghiului ABC.

Demonstraţie

Din $[DH_D] \perp (ABC) \Rightarrow DH_D \perp BC$ (1)

$AD \perp DC$ şi $AD \perp DB \Rightarrow AD \perp (BDC) \Rightarrow AD \perp BC$ (2)

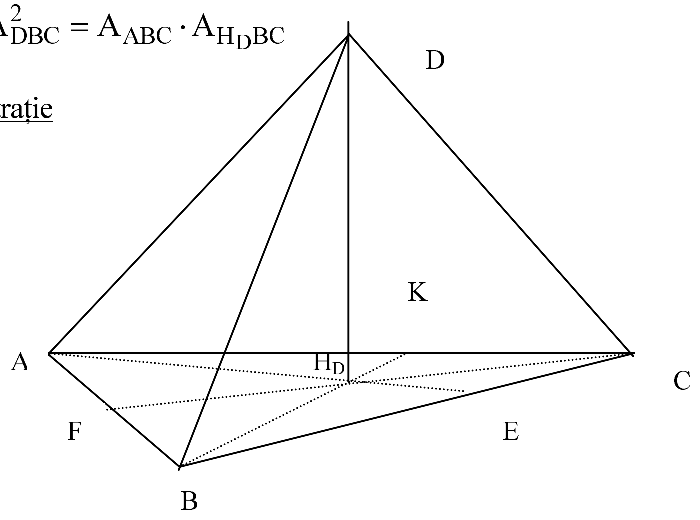
Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow BC \perp (ADH_D) \Rightarrow BC \perp AH_D \Rightarrow AH_D$ înălţime în triunghiul ABC

Analog BH_D înălţime $\Rightarrow H_D$ ortocentrul ΔABC

R3.13.3.

Dacă ABCD este un tetraedru tridreptunghic în D şi H_D piciorul înălţimii din D pe faţa ABC, $A_{DBC}^2 = A_{ABC} \cdot A_{H_DBC}$

Demonstraţie



$AD \perp BD$, $BD \perp CD$, $CD \perp AD$ şi $BC \perp (ADE)$

În ΔADE din T.C $\Rightarrow DE^2 = H_DE \cdot AE$. Înmulţim egalitatea cu $\frac{BC^2}{4}$ şi obţinem:

$$\left(\frac{DE \cdot BC}{2}\right)^2 = \frac{AE \cdot BC}{2} \cdot \frac{H_DE \cdot BC}{2} \Rightarrow \text{relaţia cerută}$$

Bibliografie

D.Brânzei şi colectivul, *Planul şi spaţiul euclidian*; Ed. Academiei 1986

D.Brânzei şi colaboratorii, *Bazele raţionamentului geometric*, Ed. Academiei 1983

J. Hadamard, *Lecţii de geometrie elementară, Geometrie în spaţiu*, Ed. Tehnică 1961

A.N. Kolmogorov, A.F. Semenovici, F.F. Naghibiu, R.S. Cerkosov, V.A. Guşev, *Geometrie pentru clasele VI-VIII*, EDP 1979

K. Teleman, M. Florescu, C. Rădulescu, D. Moraru, E. Stătescu, *Matematică-geometrie şi trigonometrie clasa a X-a*, EDP 1979

M. Miculiţa, *Introducere în geometria tetraedrului*, Ed. Minied, Iaşi 1994

I. Cuculescu şi colectivul, *Matematică- Geometrie- Manual pentru clasa a VIII-a*, EDP 1997

A. Negrilă, M. Negrilă, *Algebră-Geometrie-clasa a VIII-a*, Ed. Paralela 45/ 2002

C. Cărbunaru, I. Cheşcă, V. Mangu, A. Negru, I. Sebestyen, *Culegere de probleme în sprijinul elevilor claselor V-VIII*, SSM 1981, pag 419-446

I. Georgescu, *Geometrie în spaţiu*, Ed. All 1995, pag 40-117

A. Bălăucă, I. Ţicalo, *Matematică-Geometrie în spaţiu*, Ed. Axa Botoşani 1996 pag 12-28

A. Moţ, *Geometrie-Probleme de perpendicularitate în spaţiu*

M. Miculiţa, D. Brânzei, *Analogii triunghi-tetraedru*, Ed. paralela 45/2000

M. Maricel, *Tabăra naţională de matematică*, Craiova 2001

T. Lalescu, *Geometria triunghiului*, vol I,Ed. Apollo,Craiova 1993

L. Nicolescu, V. Borkoff- *Probleme practice de geometrie*, Ed. Tehnică 1990 Bucureşti

Foaia matematică 2/1998

4. Distanțe şi unghiuri în spațiu

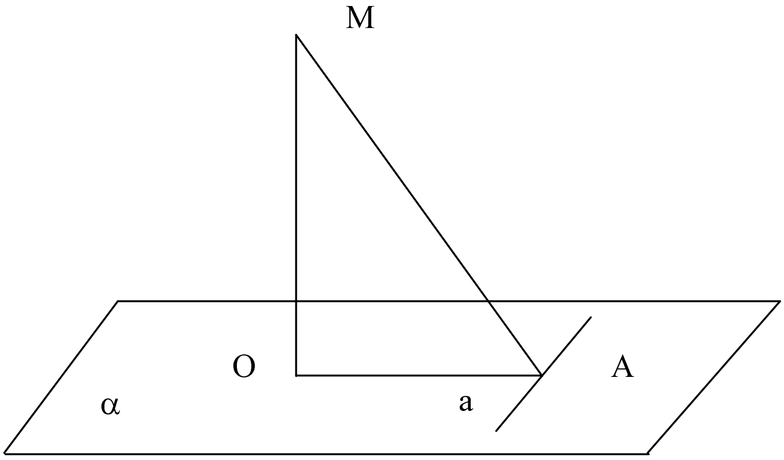
Tema cuprinde metode de determinare a distanței şi calculul distanței între două elemente din geometria în spațiu. Vom prezenta modalități prin care se pune în evidență segmentul ce reprezintă distanța, dar şi modul cum se calculează distanța respectivă. Distanța reprezentând drumul cel mai scurt, este utilă în problemele de optimizare.

4.1. Distanța de la un punct la o dreaptă

Metode de determinare şi calcul a distanței

1. Determinarea distanței folosind teorema celor trei perpendiculare

   Fie planul α şi punctul M exterior planului, iar dreapta a inclusă în planul α.



Pentru a determina distanța de la punctul M la dreapta a procedăm astfel:

- ducem $MO \perp \alpha$, $o \in \alpha$

  $OA \perp a$, $A \in a$

  $a \subset \alpha$

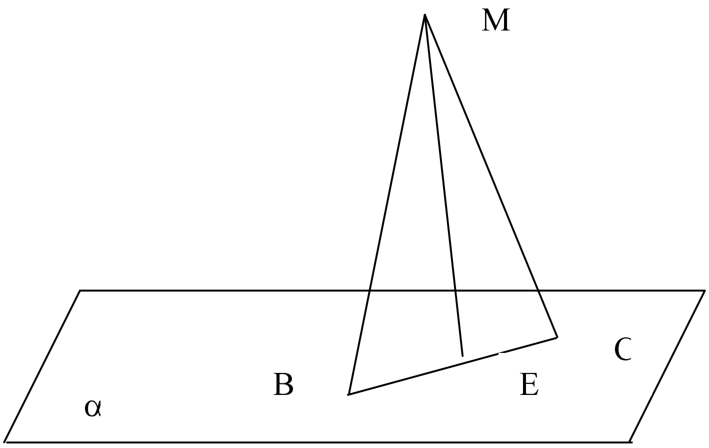
T3⊥

$\Rightarrow$ $MA \perp a$

$\Rightarrow$ $d(M; a)=MA$, ea se calculează prin teorema lui Pitagora din Δ MOA cu $m(\angle MOA)=90^0$

2. Determinarea distanței folosind înălțimea triunghiului

   Se consideră planul α şi M un punct exterior lui, iar punctele $B \in \alpha$, $C \in \alpha$.



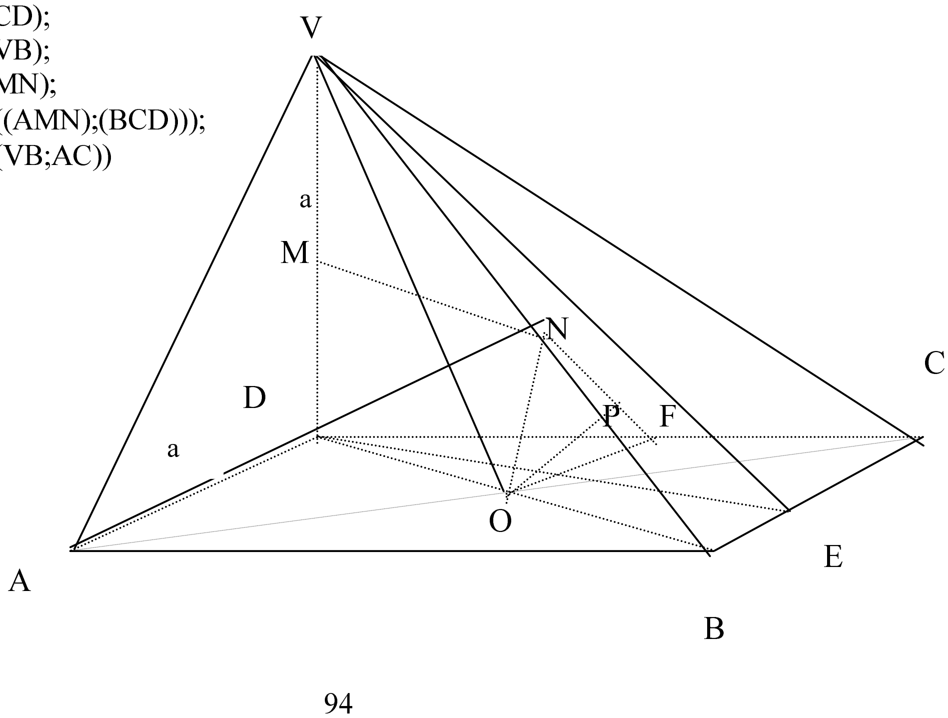
În Δ MBC ducem ME⊥BC, E∈BC⇒ d(M ; BC)=ME.
Pentru a determina ME, calculăm lungimile laturilor triunghiului MBC şi apoi înălțimea ME , prin teorema lui Pitagora sau folosind aria ΔMBC.

Probleme rezolvate

R4.2.1. Pe planul rombului ABCD de latură a şi diagonala AC=$a\sqrt{3}$, se ridică perpendiculara VD, VD=a. Fie M şi N mijloacele segmentelor [VD] respectiv [VB]. Să se afle:

a) d(V;AC);
b) d(V;BC);
c) d(N;CD);
d) d(A;VB);
e) d(A;MN);
f) m(∠((AMN);(BCD)));
g) m(∠(VB;AC))

<u>Soluție</u>



a) Metoda1

$AC \cap BD = \{O\}$

ΔAOD dr $\Rightarrow DO = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow BD = 2DO = a \Rightarrow \Delta\ BCD$ echilateral

$\left.\begin{array}{l} VD \perp (ABCD) \\ DO \perp AC \\ DO \subset (ABCD) \\ AC \subset (ABCD) \end{array}\right| \overset{T3\perp}{\Rightarrow} VO \perp AC \Rightarrow d(V;AC) = VO$

$VD \perp (ABCD) \Rightarrow VD \perp DO \Rightarrow \Delta VDO$ dreptunghic $\Rightarrow VO \overset{T.P.}{=} \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Metoda2

$VD \perp (ABCD) \Rightarrow VD \perp AD \Rightarrow \Delta VAD$ dr

şi $VD \perp DC \Rightarrow \Delta VDC$ dr $\overset{T.P.}{\Rightarrow} VA = VC = a\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta VAC$ isoscel

[VO] mediană

$\Rightarrow VO \perp AC \Rightarrow d(V;AC) = VO$

$\Rightarrow \Delta VOA$ dr $\Rightarrow VO \underset{T.P.}{=} \sqrt{2a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

b) În unele probleme rezolvitorul trebuie să construiască o parte din desen pentru a putea aplica teorema celor trei perpendiculare astfel:

Ducem $DE \perp BC$, $E \in BC$

$\left.\begin{array}{l} VD \perp (ABCD) \\ DE \perp BC \\ DE \subset (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \end{array}\right|$

$\overset{T.3\perp}{\Rightarrow} VE \perp BC \Rightarrow d(V;BC) = VE$

ΔDBC echilateral, [DE]-înălțime $\Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$VD \perp (ABCD) \Rightarrow VD \perp DE \Rightarrow \Delta VDE$ dr $\Rightarrow VE \underset{T.P.}{=} \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

c) [NO] – linie mijlocie în $\Delta VDB \Rightarrow NO \parallel VD$

$VD \perp (ABCD)$

$\Rightarrow ON \perp (ABCD)$

$ON \perp (ABCD)$

$OF \perp DC$

$DC \subset (ABCD)$

$OF \subset (ABCD)$

$\overset{T3\perp}{\Rightarrow}$ $NF \perp CD \Rightarrow d(N;CD)=NF$

ΔCOD dr $\Rightarrow$ $OF = h = \dfrac{\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

$NO \perp (ABCD) \Rightarrow NO \perp OF \Rightarrow \Delta$ NOE dr $\underset{T.P.}{\Rightarrow}$ $NF = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{16}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$

d) $AO \perp BD$

$AO \perp VD$ ($VD \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow AO \perp (VBD)$

$AO \perp (VBD)$

$OP \perp VB$

$OP \subset (VBD)$

$VB \subset (VBD)$

$\overset{T.3\perp}{\Longrightarrow}$ $AP \perp VB \Rightarrow d(A;VB)=AP$

ΔBOP | $\angle P \equiv \angle D$ (90^0)

ΔBVD | $\angle B$ comun

$\Rightarrow \Delta BOP \sim \Delta BVD$

$\dfrac{OP}{VD} = \dfrac{OB}{VB} \Rightarrow \dfrac{OP}{a} = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{a\sqrt{2}}$; $OP = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

$AO \perp (VBD) \Rightarrow AO \perp OP \Rightarrow \Delta$ AOP dr . Din T.P. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $AP = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{2a^2}{16}} = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$

e) $AO \perp (VBD)$

$ON \perp MN$

$ON \subset (VBD)$

$MN \subset (VBD)$

T3⊥

$\Rightarrow AN \perp MN \Rightarrow d(A;MN)=AN$

[MN] linie mijlocie în $\Delta VBD \Rightarrow MN \parallel BD$

$NO \perp BD \Rightarrow NO \perp MN$

ΔAON dr $\Rightarrow AN = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a$

f) $A \in (AMN) \cap (BCD)$

$MN \parallel BD$ $\Rightarrow (AMN) \cap (BCD) = d,\ A \in d,\ d \parallel MN \parallel BD$

Determinăm unghiul plan corespunzător diedrului

$AN \perp MN,\ MN \parallel d \Rightarrow AN \perp d$

$AO \perp BD,\ BD \parallel d \Rightarrow AO \perp d$ $\Rightarrow m(\angle((AMN);(BCD))) = m(\angle NAO)$

ΔNAO dr. în O $\Rightarrow tg(\angle A) = \frac{NO}{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

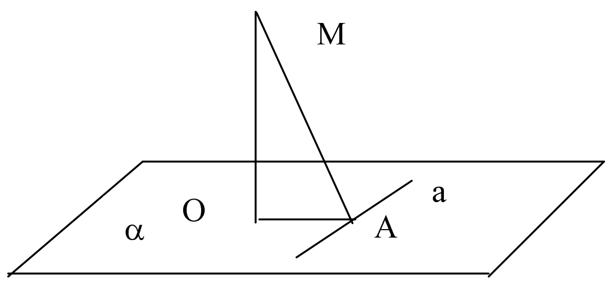
g) Din $AC \perp (VBD) \Rightarrow AC \perp VB \Rightarrow m(\angle(VB;AC)) = 90^0$

4.2. Distanța de la un punct la un plan

Metode de determinare şi calcul a distanței

1. <u>Determinarea distanței folosind reciproca teoremei celor trei perpendiculare</u>

   Fie un plan α şi M un punct exterior planului



Pentru a determina distanța de la punctul M la planul α procedăm astfel:

Considerăm dreapta $a \subset \alpha$.

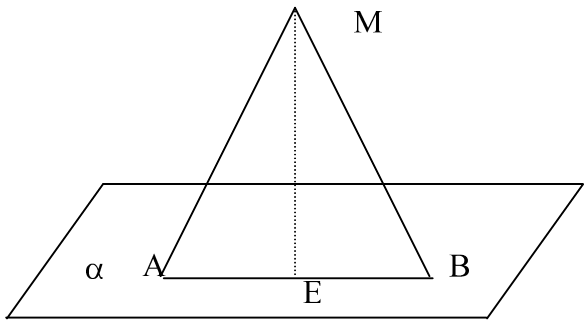
Ducem $OA \perp a,\ A \in a$

$MO \perp OA$

R.T.3⊥ $MA \perp a$

$\Rightarrow MO \perp \alpha \Rightarrow d(M;\alpha) = MO$

2. <u>Determinarea distanței folosind plane perpendiculare</u>



Punem în evidență pe desen două plane perpendiculare astfel ca unul să conțină punctul iar celălalt este planul la care determinăm distanța.

Fie planul α şi M un punct exterior lui.

Pentru a determina distanța de la M la planul α, punem în evidență planul (MAB) astfel încât $(MAB)\perp\alpha$, atunci:

Din $(MAB)\perp\alpha$

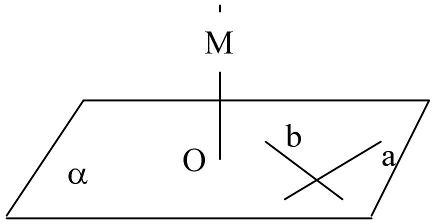
$(MAB)\cap\alpha=AB$

ducem $ME\perp AB$

$\Rightarrow ME\perp\alpha \Rightarrow d(M;\alpha)=ME$

3. <u>Determinarea distanței folosind perpendiculara pe plan</u>

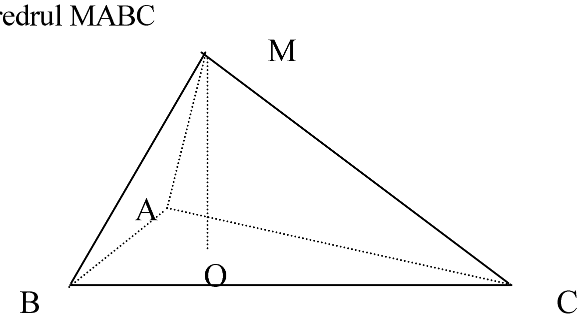
Fie planul α şi M un punct exterior lui.



Dacă $MO\perp a$, $a\subset\alpha$ şi $MO\perp b$, $b\subset\alpha \Rightarrow MO\perp\alpha \Rightarrow d(M;\alpha)=MO$

4. <u>Determinarea distanței folosind înălțimea unei piarmide</u>

Fie tetredrul MABC



Dacă determinăm volumul tetraedrului şi

$MO \perp (ABC) \Rightarrow d(M;(ABC)) = MO$ şi

$$MO = \frac{3 \cdot V_{VABC}}{A_{ABC}}$$

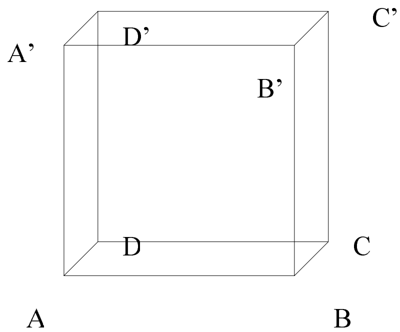
Probleme rezolvate

R4.5.1. Se consideră cubul ABCDA'B'C'D', cu muchia de lungime a.

Să se determine:

1) $d(A;(A'BD))$;

2) $d(C'; (A'BD))$.



Soluție

1)

Metoda1

$AC \cap BD = \{O\}$

$\Delta A'BD$ isoscel

$[A'O]$-mediană

$\Rightarrow A'O \perp BD$

Ducem $AE \perp A'O$, $E \in A'O$

$EO \perp BD$

$AO \perp BD$

R.T.3.⊥

$\Rightarrow AE \perp (A'BD) \Rightarrow d(A;(A'BD)) = AE$

$\Delta A'AO$ dr în A', $AE = h = \dfrac{AA' \cdot AO}{A'O}$

Metoda 2

$BD \perp AO$

$BD \perp AA'$ $\Rightarrow BD \perp (A'AO)$

$BD \subset (A'BD)$ $\Rightarrow (A'BD) \perp (AA'O)$

Dar $(A'AO) \cap (A'BD) = A'O$, $AE \perp A'O \Rightarrow AE \perp (A'BD) \Rightarrow d(A;(A'BD)) = AE$

Metoda 3

Ducem $AE \perp A'O$ (1)

$BD \perp AO$

$BD \perp AA'$ $\Rightarrow BD \perp (AA'O) \Rightarrow BD \perp A'O$ (2)

Din relațiile (1)şi (2) $\Rightarrow AE \perp (A'BD) \Rightarrow d(A;(A'BD)) = AE$

2) CA'BD tetraedru regulat pentru că $CA' = CB = CD = A'B = A'D = BD =$ $= a\sqrt{2}$, atunci $d(C;(A'BD)) = h_C$, unde h_C este înălțimea tetraedrului corespunzătoare feței (A'BD)

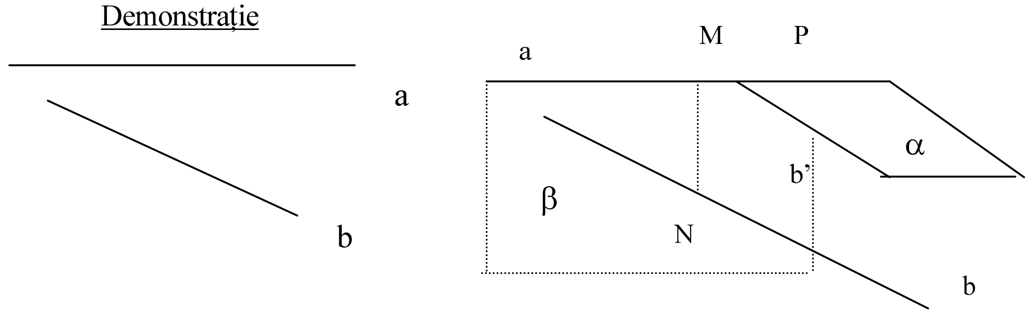
4.3. Distanța dintre două drepte

Fiind date două drepte oarecare a şi b în spațiu şi două puncte $M \in a$ şi $N \in b$ astfel încât $Mn \perp a$ şi $MN \perp b$, spunem că dreapta MN este perpendiculara comună a dreptelor a şi b, iar lungimea segmentului [MN]este distanța de la dreapta a la dreapta b.

Teorema 4.3.1.

Dacă a şi b sunt drepte necoplanare, atunci există o dreaptă MN perpendiculara comună a dreptelor a şi b.

<u>Demonstrație</u>

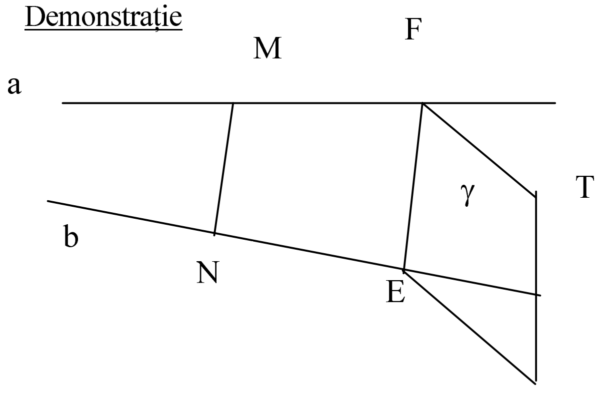


Pe dreapta a considerăm un punct P oarecare. Din P ducem o dreaptă b' paralelă cu b. Dreptele a şi b' determină un plan α care este paralel cu b. Prin dreapta a ducem un plan β care să fie perpendicular pe α.Panul β intersectează dreapta b în punctul N. Din punctul N ducem în β o dreaptă MN perpendiculară pe a. Dreapta $MN \perp a$ (din construcție) şi pe b deoarece $b \| \alpha$, $\beta \perp \alpha$ deci $\beta \perp b$, iar $MN \subset \beta$ deci $b \perp MN$, în concluzie $MN \perp a$ şi $MN \perp b$, există perpendiculara comună.

Teorema 4.3.2.

Perpendiculara comună a două drepte necoplanare este unică.

<u>Demonstrație</u>



Presupunem prin absurd că există două perpendiculare comune MN şi EF, deci $MN \perp a$, $MN \perp b$, $EF \perp a$, $EF \perp b$. Prin punctul F al dreptei a ducem $FT \| MN$, dreptele EF şi FT determină un plan γ. Avem $MF \perp MN$, deci $MF \perp FT$. De asemenea $MF \perp FE$, deci $MF \perp \gamma$ (1).

Analog NE$\perp$NM, deci NE$\perp$FT şi NE$\perp$FE $\Rightarrow$ NE$\perp\gamma$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ MF$\|$NE $\Rightarrow$ a$\|$b ceea ce contrazice condiţia din ipoteză prin care am precizat că a şi b sunt necoplanare.

Deci presupunerea făcută ne-a condus la o contradicţie $\Rightarrow$ perpendiculara comună este unică.

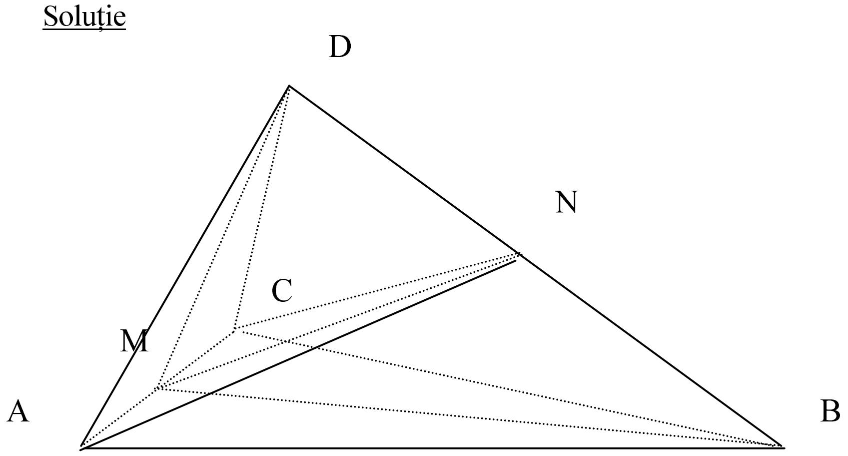
Modul în care am demonstrat existenţa perpendicularei comune nu oferă un procedeu practic util în rezolvarea problemelor de determinare a distanţei în spaţiu. Din acest motiv vom prezenta raţionamente specifice acestui gen de probleme.

Probleme rezolvate

1. În unele probleme este utilă folosirea proprietăţii triunghiului isoscel şi anume că mediana corespunzătoare bazei este şi înălţime.

R4.8.1. Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare astfel încât DA=DC=BA=BC=a, iar AC=BD=b. Să se pună în evidenţă distanţa dintre dreptele AC şi BD şi apoi să se calculeze în funcţie de a şi b.

Soluţie



Fie M şi N mijloacele segmentelor [AC] şi [BD], segmentul [MN] se numeşte bimediană. Arătăm că MN este perpendiculară comună a celor două drepte.

Triunghiul ADC isoscel, [DM] mediană $\Rightarrow$ DM$\perp$AC (1)

Triunghiul ABC isoscel, [BM] mediană $\Rightarrow$ BM$\perp$AC (2)

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ AC$\perp$(DMB), MN$\subset$ (DMB) $\Rightarrow$ AC$\perp$MN (3)

Analog Δ DCB şi Δ DAB isoscele. În Δ DCB, [CN] mediană $\Rightarrow$CN$\perp$BD (4)

În ΔDAB, [AN] mediană $\Rightarrow$AN$\perp$BD (5)

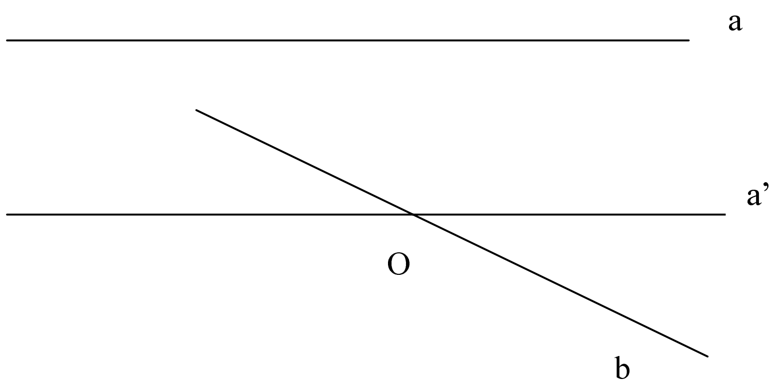
Din relaţiile (4) şi (5) $\Rightarrow$ BD$\perp$(ANC), MN$\subset$(ANC) $\Rightarrow$ BD$\perp$MN (6)

Din relaţiile (3) şi (6) $\Rightarrow$ MN distanţa de la AC la BD.

Δ DMC dreptunghic $\Rightarrow$ $DM = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ (T.P)

Δ MND dreptunghic $\Rightarrow$ $MN = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 2b^2}$ (T.P)

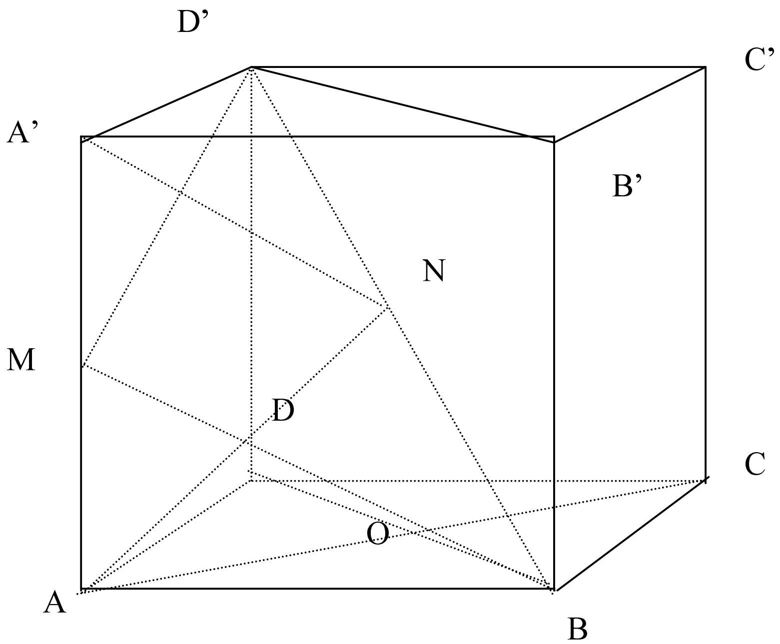
2. O metodă eficientă de determinare a distanței dintre două drepte necoplanare a şi b este următoarea: determinăm un plan α astfel încât $b \subset \alpha$ şi $a \| \alpha$, atunci $d(a;b)=d(a;\alpha)$



Fie a şi b cele două drepte. Printr-un punct O al dreptei b ducem dreapta a', astfel încât $a' \| a$, atunci $a \| (a',b) \Rightarrow d(a;b)=d(a;(a',b))$

R4.8.2. Se consideră cubul ABCDA'B'C'D' de muchie a. Să se calculeze distanța de la diagonala BD' la muchia AA', în funcție de a .

Soluție



Metoda 1

Fie M mijlocul lui [AA'] şi N mijlocul lui [BD']. Folosind faptul că triunghiurile BMD' şi A'NA sunt isoscele iar [MN] este mediană în fiecare $\Rightarrow$ d(AA';BD') este MN şi MN=$\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

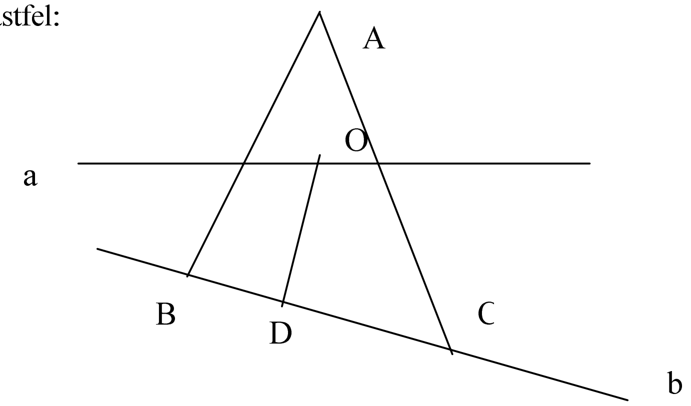
Metoda 2

În cubul ABCDA'B'C'D' avem AA'||BB' , BB'$\subset$ (BDD'B')$\Rightarrow$ $\Rightarrow$AA'||(BDD'B') $\Rightarrow$ d(AA';BD')=d(AA';(BDD'B')). Dreapta AA' fiind paralelă cu planul (BDD'B'), fiecare punct al său are aceeaşi distanţă faţă de planul respectiv. Alegând un punct convenabil putem calcula distanţa. Fie A acest punct.

$$\left.\begin{array}{l} AO\perp BD \\ AO\perp BB' \end{array}\right| \Rightarrow AO\perp(BDD'B') \Rightarrow AO\perp BD' \text{ şi } AO\perp AA' \ (AA'\perp(ABCD))\Rightarrow$$

d(AA';BD')=AO=$\frac{a\sqrt{2}}{2}$

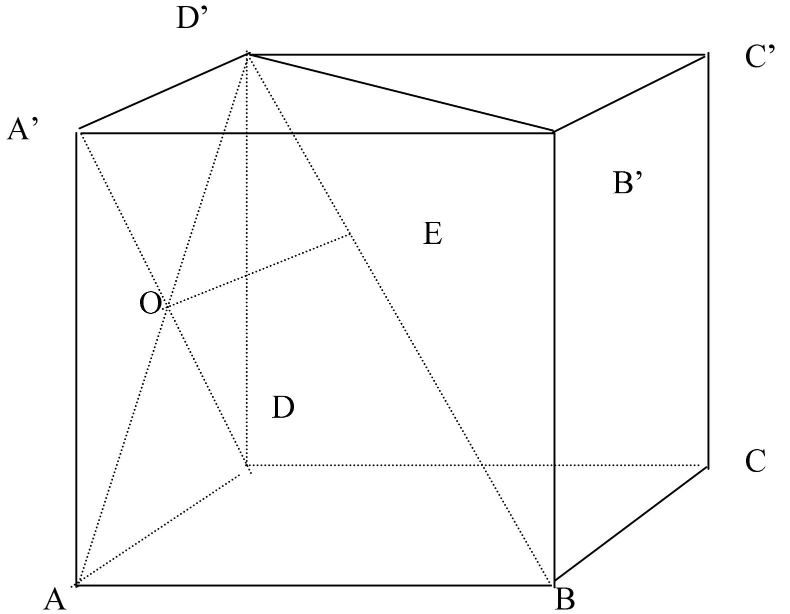
3. Pentru a determina distanţa dintre două drepte a şi b necoplanare putem proceda astfel:



Determinăm un plan (ABC) care conţine dreapta b şi a$\perp$(ABC). Din punctul de intersecţie O al dreptei a cu planul (ABC) ducem OD$\perp$b, D$\in$b. Distanţa dintre dreptele a şi b este OD, pentru că a$\perp$(ABC), OD$\subset$ (ABC) $\Rightarrow$ a$\perp$OD, şi din construcţie b$\perp$OD.

R4.8.3. Cubul ABCDA'B'C'D' are muchia a. Determinați și calculați distanța dintre dreptele A'D și BD'.

Soluție



ADD'A' pătrat $\Rightarrow$ A'D$\perp$AD' (1)

AD'$\cap$ A'D={O}

AB$\perp$(ADD'A') $\Rightarrow$ AB$\perp$A'D (2)

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow$ A'D$\perp$(ABD')

Ducem OE$\perp$BD'. Din A'D$\perp$(D'AB) $\Rightarrow$ A'D$\perp$OE, dar OE$\perp$BD' din construcție $\Rightarrow$ d(A'D;BD')=OE

Pentru determinarea distanței folosim asemănarea triunghiurilor D'OE și D'BA $\Rightarrow$ OE=$\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

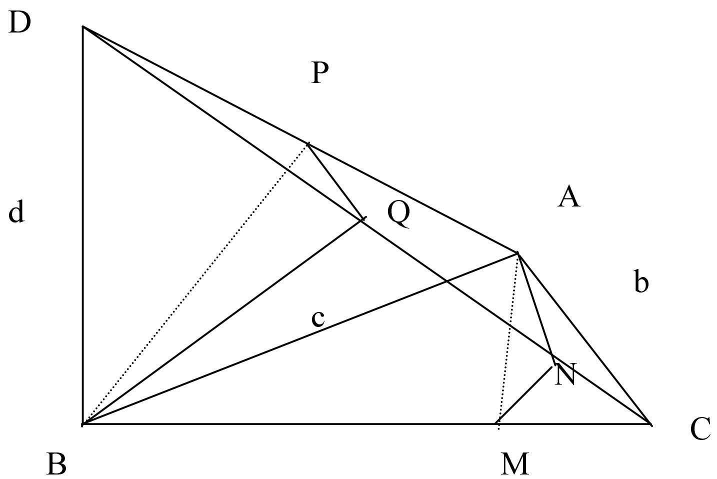
4.4. Distanța dintre două plane paralele

Definiția 4.4.1 Distanța dintre două plane paralele α și β, notată d(α;β), este distanța de la un punct oarecare al planului α la planul β.

Probleme rezolvate

R4.11.1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu catetele de lungime b și c. În B se ridică segmentul BD=d, perpendicular pe planul triunghiului. Notăm cu M și N proiecțiile punctului A pe dreptele BC și CD, iar cu P și Q proiecțiile punctului B pe dreptele AD, respectiv DC. Calculați distanța dintre planele (BPQ) și (AMN).

Soluție



Arătăm că $(AMN) \| (BPQ)$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}DB\perp(ABC)\\ DB\subset(DBC)\end{array}\right|\Rightarrow (ABC)\perp(DBC)\\ \qquad\qquad (ABC)\cap(DBC)=BC\\ \qquad\qquad AM\perp BC\end{array}\right|\Rightarrow AM\perp(DBC)$$

$$\left.\begin{array}{l}AM\perp(DBC)\\ AN\perp DC\\ DC\subset(DBC)\\ MN\subset(DBC)\end{array}\right|\overset{R.T3\perp}{\Rightarrow} MN\perp CD$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Avem } DC\perp AN \text{ (ip)}\\ \qquad DC\perp MN \text{(dem)}\end{array}\right|\Rightarrow DC\perp(AMN)\ \ (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}AC\perp AB \text{ (ip)}\\ AC\perp DB\ (DB\perp(ABC))\end{array}\right|\Rightarrow \left.\begin{array}{l}AC\perp(ABD)\\ AC\subset(DAC)\end{array}\right|\Rightarrow (DAC)\perp(ABD)$$

$$\left.\begin{array}{l}(DAC)\perp(ABD)\\ (DAC)\cap(ABD)=AD\\ BP\perp AD\end{array}\right|\Rightarrow BP\perp(DAC)$$

$$\left.\begin{array}{l}BP\perp(DAC)\\ BQ\perp DC\\ DC\subset(DAC)\\ PQ\subset(DAC)\end{array}\right|\overset{RT3\perp}{\Rightarrow} PQ\perp DC$$

$$\left.\begin{array}{l} PQ\perp DC \text{ (dem)} \\ BQ\perp DC \text{ (ip)} \end{array}\right| \Rightarrow DC\perp(BPQ) \quad (2)$$

Din relațiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ (BPQ)$||$(AMN) şi d((BPQ);(AMN))=QN

Pentru calculul distanței procedăm astfel:

Δ ABC dr. Din T.P. avem: $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$

Din T.C. avem: $AC^2 = MC \cdot BC \Rightarrow MC = \dfrac{AC^2}{BC}$

$$\Rightarrow MC = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Δ DBC dr. Din T.P. avem: $DC = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta DBC \\ \Delta MNC \end{array}\right| \left\{\begin{array}{l} \angle C - \text{comun} \\ \angle N \equiv \angle D \ (90^0) \end{array}\right. \Rightarrow \Delta DBC \sim \Delta MNC$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{DC} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow CN = \frac{MC \cdot BC}{DC}$$

$$\Rightarrow CN = \frac{\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}$$

Δ DBC dr. Din T.C. avem: $BD^2 = DQ \cdot DC \Rightarrow DQ = \dfrac{BD^2}{CD} = \dfrac{d^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}$

QN=DC – (DQ+NC)

$$\Rightarrow QN = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} - \frac{d^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} - \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 + d^2 - d^2 - b^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d}} = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d}}$$

5.Probleme de maxim, minim

Rezumat: În cadrul temei sunt prezentate diferite metode de a determina maximul, minimul unei expresii precum şi diferite aplicații în geometrie.

5. 1. Metoda inegalităților

Reprezintă o metodă de delimitare a unor expresii, folosind diferite inegalități, respective condițiile pentru care are loc egalitatea în acestea

Exemplu. Dacă x, y, z ∈ |R şi x+y+z= 1 să se determine maximul expresiei

E(x, y, z)= $\sqrt{5x+y+z}+\sqrt{5y+z+x}+\sqrt{5z+x+y}$

Rezolvare:

5x+y+z, 5y+z+x, 5z+x+y≥0.

Exemplu de abordare greşită a problemei:

Folosind inegalitatea mediilor

E(x, y, z)≤$\frac{5x+y+z+5y+z+x+5z+x+y+3}{2}$≤5 cu egalitate dacă şi numai

dacă 5x+y+z=5y+z+x=5z+x+y=1 ⇔ x=y=z=0, contradicție, ⇒5 nu e maximul expresiei, doar un majorant, deoarece nu se atinge pentru nici o valoare a lui x, y, z.

Metoda corectă

$\sqrt{5x+y+z}$=a;

$\sqrt{5y+z+x}$=b;

$\sqrt{5z+x+y}$=c;

5x+y+z=a^2;

5y+z+x=b^2;

5z+x+y=c^2;

Adunând relațiile, se obține

S=7=$a^2+b^2+c^2$;

$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{3}}\geq\frac{a+b+c}{3}$ ⇔ a+b+c≤ $\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=\sqrt{21}$ cu egalitate ⇔

x=y=z=$\frac{1}{3}$

5. 2. Metoda funcțiilor

5. 2. 1. Funcții de gradul I pe un interval

f:[m, ∞)→ $\mathbb{R}$ f(x)=ax+b

a> 0 min f=f(m) ținând cont că f este strict crescătoare, maximul nu există

a< 0 max f=f(m)

minimul funcției nu există.

$f:[m, n] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x)=ax+b$ ($a>0$) $\max\limits_{x\in[m,n]} f(x)=f(n)$

$\min\limits_{x\in[m,n]} f(x)=f(m)$

Rolurile se schimbă dacă $a<0$.

5. 2. 2. Funcții de gradul II

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-\Delta/4a\right)$.

Cazul I

$a>0$

f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right)$ şi strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ şi

min $f=-\Delta/4a=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. max f nu există.

Cazul II

$a<0$

f este strict descrescătoare pe $\left[-\frac{-b}{2a}, \infty\right)$ şi strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$,

max $f=-\Delta/4a=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. min f nu există.

Exemplu

Deduceți max f, min f pentru funcțiile:

a.) $f: [-10, 3] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2-2x$.

x	-10		1		3
f(x)	80	↘	-1	↗	3

min $f=-1=f(1)$

max $f=80=f(-10)$

b.) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $x\in[-2, 1]$

x	-2		0		1
f(x)	$\sqrt{5}$	↗	3	↘	$2\sqrt{2}$

$3=\max f(x)=f(0)$, $x\in[-2, 1]$

$\sqrt{5}=\min f(x)=f(-2)$, $x\in[-2, 1]$

5. 2. 3. Deducerea imaginii unei funcții

Fie f: A→ B. Prin imaginea funcției f, notată Imf înțelegem mulțimea { $y \in B$| ecuația f(x)=y are cel puțin o soluție $x \in A$}.

Exemplu: f: ℝ → ℝ f(x)= $\dfrac{x^2 - x + 1}{x \ \ + x + 1}$

Determinați min f, respectiv max f.

Deducem Imf adică acei $y \in$|R astfel încât ecuația f(x) =y să aibă cel puțin o soluție.

$\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$=y are soluție⇔ $yx^2+yx+y-x^2+x-1=0$⇔ $(y-1)x^2+(y+1)x+y-1=0$

$\Delta \geq 0$⇔ $(y+1)^2-4(y^2-2y+1)>=0$⇔ $y^2+2y+1-4y^2+8y-4>=0$⇔ $3y^2-10y+3\leq 0$

$\Delta=2^2 5^2-2^2 \bullet 3 \bullet 3=2^2 \bullet 4^2=8^2$

$y_{1,2}=(10\pm 8)/6$

$y_1=3$, $y_2=1/3$.

$y \in [1/3, 3]$=Imf⇒ min f=1/3 şi se atinge pentru soluția ecuației f(x)=1/3 respectiv max f=3 şi se atinge pentru soluția ecuației f(x)=3.

6. 3. Metoda geometrică

Ex. Să se găsească $x \in$ ℝ astfel încât valoarea expresiei E(x) să fie minimă unde

E(x)=$\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 32}$

Rezolvare.

E(x)= $\sqrt{(x-1)^2 + 2^1} + \sqrt{(x-4)^2 + 4^2}$

A(1, 2), B(4, 4).

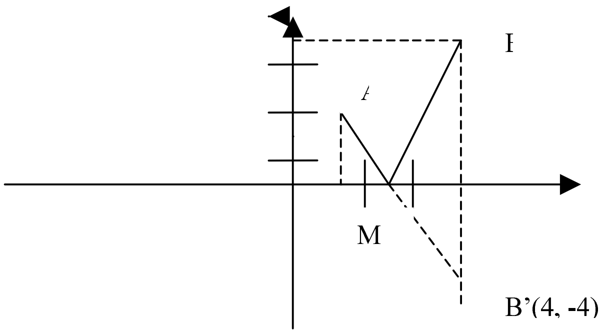
E(x)=AM+MB=AM+MB' minimă⇔

A, M, B' coliniare. B'(4, -4)

Determinăm funcția de gradul I f: ℝ → ℝ

F(x)=ax+b astfel încât G_f=AB'

$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(4) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = -4 \\ a = -2, b = 4 \end{cases}$ f(x)= -2x+4;



$G_f \cap OX=\{Mo(2, 0)\}$

min E(x)= E(2)= $\sqrt{5}+\sqrt{20}=3\sqrt{5}$

5. 4. Probleme rezolvate

Algebră

R5. 4. 1. Fie x, y, z $\in 1, \infty)$ şi E= $\frac{\sqrt{xy-1}}{xy}+\frac{\sqrt{yz-1}}{yz}+\frac{\sqrt{zx-1}}{zx}$

Arătați că max E= 3/2. Precizați în ce condiții se obține acest maxim.
Rezolvare.

Determinarea maximului expresiei $\frac{\sqrt{a-1}}{a}=\frac{u}{1+u^2}\leq 1/2$ cu egalitate $\Leftrightarrow$ u=1 $\Leftrightarrow$ a=2

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} xy=2 \\ yz=2 \\ xz=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ xyz=2$\sqrt{2}$, max E=3/2;

R5. 4. 2. a) Să se determine numerele reale x pentru care raportul: $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$ are valoare minimă.

b) Dacă $x_1, x_2, x_3 \in |R_+$ şi $3x_1 \bullet x_2 \bullet x_3=1$, demonstrați că

$$\max\left\{\frac{x_1x_2}{9x_1^2x_2^2+1}+\frac{x_2x_3}{9x_2^2x_3^2+1}+\frac{x_1x_3}{9x_1^2x_3^2+1}\right\}=\frac{1}{2}$$

a) f(x)=$\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq 3/4$
cu egalitate $\Leftrightarrow$ x=1/2

b) g(a)=$\frac{a}{9a^2+1}\leq 1/6$ cu egalitate $\Leftrightarrow$ a=1/3

$\Rightarrow g(x_1 \bullet x_2)+g(x_2 \bullet x_3)+g(x_1 \bullet x_3)\leq 1/6+1/6+1/6=1/2$ cu egalitate $\Leftrightarrow$

x_1x_2=1/3; x_1x_3=1/3;x_2x_3=1/3}$\Rightarrow x_1x_2x_3=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ ⇔ $x_1=x_2=x_3$=1/3

R5. 4. 3. M={n∈|N | $x^n+y^n+z^n+t^n$=xyzt are soluții x, y, z, t ∈ |N*}Determinați maxim, minim.

Rezolvare:

n≥4 xyzt=$x^n+y^n+z^n+t^n \geq 4\sqrt[4]{x^n y^n z^n t^n}$ ≥4xyzt contradicție cu x, y, z, t ∈ |N*

n=0 o soluție a ecuației xyzt=4 este (1, 1, 1, 4)

n=1 x+y+z+t=xyzt are o soluție (1, 1, 2, 4)

n=2 $x^2+y^2+z^2+t^2$=xyzt soluție (2, 2, 2, 2)

n=3 $x^3+y^3+z^3+t^3$=xyzt soluție (4, 4, 4, 4)

M={0, 1, 2, 3} max M=3, min M=0

R5. 4. 4. Calculați max($\dfrac{a-c^3}{1+a}+\dfrac{b-a^3}{1+b}+\dfrac{c-b^3}{1+c}$), a, b, c∈ (-1, ∞). În ce condiții se atinge maximul?

Rezolvare

1+a=x, 1+b=y, 1+c=z, x, y, z ∈ (0, ∞)

$\dfrac{a-c^3}{1+a}=\dfrac{x-1-(z-1)^3}{x}=\dfrac{x-z^3+3z^2-3z}{x}=1-\dfrac{z(z^2-3z+3)}{x}$ şi analoagele.

Rămâne de determinat min E(x, y, z) =

$=\dfrac{z(z^2-3z+3)}{x}+\dfrac{x(x^2-3x+3)}{y}+\dfrac{y(y^2-3y+3)}{z}$.

E(x, y, z)>=$3\sqrt[3]{(x^2-3x+3)(y^2-3y+3)(z^2-3z+3)} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}\dfrac{3}{4}\dfrac{3}{4}}=\dfrac{9}{4}$ eg ⇔

x=y=z=3/2 maximul cerut = 3-$\dfrac{9}{4}$=3/4

R5. 4. 5. Dacă x, y, z ∈ [0, 1] demonstrați că max $[\dfrac{x}{yz+1}+\dfrac{y}{zx+1}+\dfrac{z}{xy+1}]=2$

Rezolvare

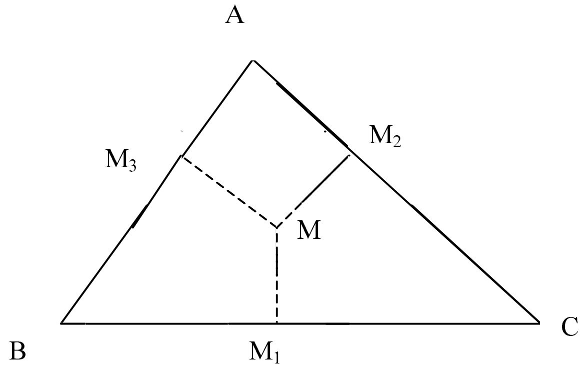
Fără a restrânge generalitatea, expresia fiind simetrică, putem presupune că x≤y≤z

$\dfrac{1}{xy+1}\geq\dfrac{1}{zx+1}\geq\dfrac{1}{yz+1}\Rightarrow M_I\leq\dfrac{x+y+z}{xy+1}$. Rămâne de demonstrat că x+y+z≤ 2xy+2.

(1-x)(1-y)≥0, (α) x,y∈ [0, 1] ⇒ 2xy+1≥x+y, 1≥z ⇒ 2xy+2≥x+y+z.

Egalitatea se atinge pentru x=z=1 şi y=0

Geometrie R5. 4. 6. Să se determine punctul din interiorul unui triunghi ABC astfel încât $MM_1 \cdot MM_2 \cdot MM_3$ să fie maxim, unde $M_1=pr._{BC}M$, $M_2=pr._{AC}M$, $M_3=pr._{AB}M$.

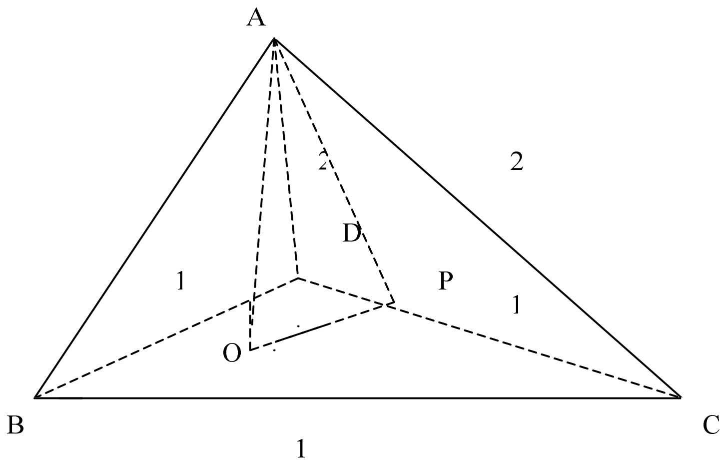


Rezolvare

$MM_1 \cdot a+MM_2 \cdot b+MM_3 \cdot c=2S\geq 3\sqrt[3]{MM_1 \cdot a \cdot MM_2 \cdot b \cdot MM_3 \cdot c} \Leftrightarrow MM_1 \cdot MM_2 \cdot MM_3 \leq \frac{8S^3}{27abc}$ cu egalitate $\Leftrightarrow$ $MM_1 \cdot a=MM_2 \cdot b=MM_3 \cdot c$ $\Leftrightarrow$ $A_{[MBC]}=A_{[MAB]}=A_{[MAC]} \Leftrightarrow$ M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

R5. 4. 7. M={ T | T tetraedru cu trei laturi cu lungimea de 1 cm şi două de 2 cm}. Calculați max v(T) unde v(T) este volumul tetraedrului T. T M.

Rezolvare



Singura posibilitate de construcție, în caz contrar se obțin ca fețe triunghiuri degenerate (1+1=2)
Fie(AO) înălțimea corespunzătoare vârfului A.
(AP) înălțime în triunghiul ADC.

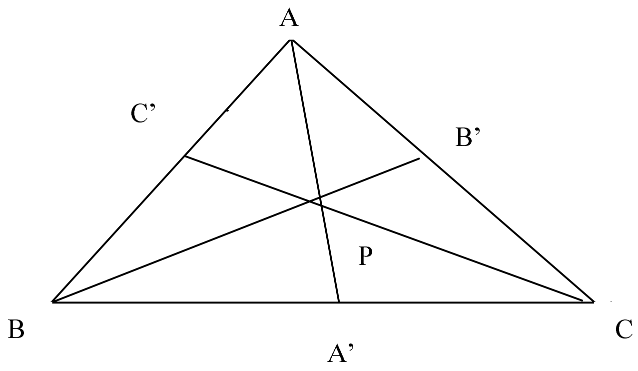
AO$\leq$AP= $\frac{\sqrt{15}}{2}$ (teorema lui Pitagora în triunghiul APC)

V[ABCD]$\leq$ $\frac{AP \cdot A_{[BCD]}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{8}$ cm^3 cu egalitate pentru (ADC) $\perp$ (BCD)
Demonstrăm că există un astfel de tetraedru .

Fie triunghiul BCD echilateral, P mijlocul lui (DC). Luăm AP $\perp$ (BCD), AP=$\frac{\sqrt{15}}{2}$ cm

$\Rightarrow$ AD=AC=2 cm$\Rightarrow$ există un astfel de tetraedru $\Rightarrow$ v(T)=$\frac{\sqrt{5}}{8}$, T$\in$M

R5. 4. 8. a) Descompuneți în factori abc+ab+ac+bc+a+b+c+1
b) Fie triunghiul ABC şi P un punct în interiorul său. Notăm{A'}=AP$\cap$BC, {B'}=BP$\cap$AC, {C'}=PC$\cap$AB şi x= PA/PA', y=PB/PB', z=PC/PC'. Să se demonstreze că S=xyz+xy+xz+yz+x+y+z+1 este minimă $\Leftrightarrow$ P este centrul de greutate al triunghiului ABC.
Rezolvare



a) abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=(a+1)(b+1)(c+1)
Conform dezvoltării de la punctul a) S=(x+1)(y+1)(z+1)=

$$(\frac{CA'}{A'B}+\frac{CB'}{B'A}+1)(\frac{BA'}{A'C}+\frac{BC'}{C'A}+1)(\frac{AC'}{C'B}+\frac{AB'}{B'C}+1)\geq$$

$$27\sqrt[3]{\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{BC'}{C'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{AB'}{B'C}}=27$$

$$\text{egalitate} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} BC' = AC'' \\ CA' = A'B \\ AB' = B'C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ P este centrul de greutate al triunghiului ABC}$$

(s-a aplicat teorema lui Van Aubel)

R5. 4 .9. Se consideră piramida triunghiulară regulată VABC. Din punctul M interior triunghiul ABC se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului care intersectează planele (VAB), (VBC), (VAC) în M_1, M_2 respectiv M_3.

a) Să se arate că $MM_1+MM_2+MM_3$=constant.

b) Să se determine punctul M din interiorul triunghiului ABC pentru suma $\sqrt{MM_1 \cdot MM_2} + \sqrt{MM_2 \cdot MM_3} + \sqrt{MM_3 \cdot MM_1}$ este maximă.

Rezolvare

O este proiecția lui V pe planul (ABC).

OM∩BC={P}, CM∩AB={R}, OM∩AC={Q}. $M_1 \in VP$, $M_2 \in VR$, $M_3 \in VQ$. O_1,O_2,O_3 proiecțiile lui O pe laturile triunghiului ABC. M_1',M_2',M_3', proiecțiile lui M pe laturile triunghiului.

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{MM_1}{VO} = \dfrac{PM}{PO} = \dfrac{MM_1'}{OO_1} \\ \dfrac{MM_2}{VO} = \dfrac{RM}{RO} = \dfrac{MM_3'}{OO_3} \\ \dfrac{MM_3}{VO} = \dfrac{MQ}{QO} = \dfrac{MM_2'}{OO_2} \end{matrix}\right\} \text{ (adunând expresiile) rezultă:}$$

$$\frac{MM_1 + MM_2 + MM_3}{VO} = \frac{MM_1' + MM_2' + MM_3'}{OO'} = \frac{h}{\frac{h}{3}} = 3, \text{ unde h= înălțimea}$$

triunghiului ABC $\Rightarrow$ $MM_1+MM_2+MM_3$ = 3VO = constant.

S-a folosit: pentru fiecare punct din interiorul unui triunghi echilateral suma distanțelor la laturi este constantă, egală cu înălțimea triunghiului. Analog cazul când OM || cu una din laturi. Demonstrația în acest caz va rămâne pentru cititori .

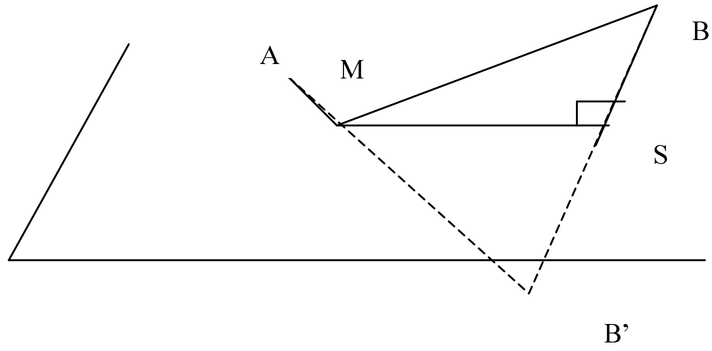
b) $S \leq MM_1+MM_2+MM_3$=const=3VO. Egalitatea pentru

$VO=MM_1=MM_2=MM_3$=const=3VO

Egalitate pentru $VO=MM_1=MM_2=MM_3 \Rightarrow M_1=M_2=M_3=V \Rightarrow O=M$.

R5. 4. 10. a) Fiind date două puncte distincte A , B , de aceeaşi parte a unui plan α , să se determine punctul M al planului α, pentru care suma AM+MB să fie minimă. b)În aceleaşi condiții ca la punctul a) determinați M ∈ α astfel încât |MA-MB| să fie maximă (AB să fie neparalel cu α).

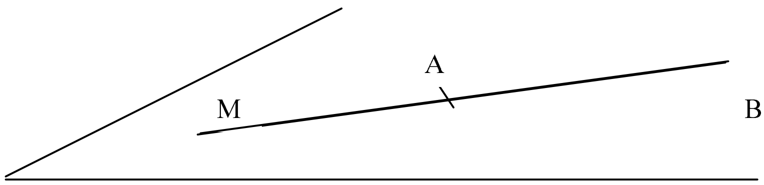
Rezolvare



B' este simetricul lui B față de α

a) AM+MB=AM+MB'minimă ⇔ A , M , B' coliniare ⇔ M=AB'∩α

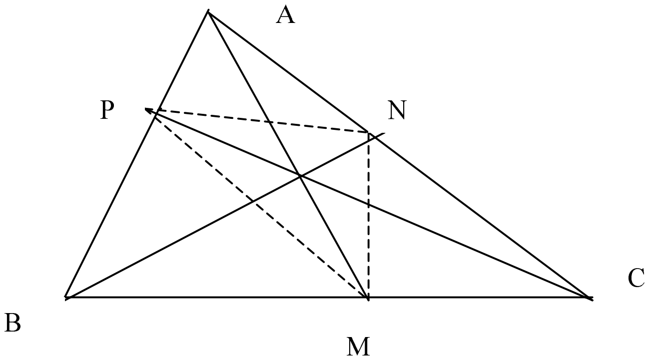
b)



|MA-MB|≤AB cu egalitate ⇔ M∈AB-(AB) => M=AB∩α

R5. 4. 11. Fie AM , BN , CP trei ceviene concurente ale triunghiului ABC ce are aria S (M∈ (BC), N∈ (AC), P∈ (AB)). Ştiind că Q∈ planului α || cu planul (ABC) şi situat la distanța h de acesta să se determine volumul maxim al tetraedrului QMNP în funcție de S şi h (A. E. Bălăucă)

Rezolvare



V[QMNP]=$\dfrac{QQ_0 \cdot A\ [MNP]}{3} = \dfrac{h \cdot A[MNP]}{3} \le \dfrac{h \cdot \frac{S}{4}}{3}$ deoarece valoarea maximă a ariei i triunghiului MNP se atinge ⇔ triunghiul MNP este triunghi median.

AP/PB=m, BM/MC=n, CN/NA=p, mnp=1.

$\dfrac{A[APN]}{A[ABC]} = \dfrac{AP \cdot AN \sin A}{AB \cdot AC \sin A} = \dfrac{m}{m+1} \cdot \dfrac{1}{p+1}$ ⇔ A[APN]=$\dfrac{m}{(p+1)(m+1)} \cdot S$ unde A[ABC]=S.

A[BMD]=$\dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{m+1} \cdot S$, A[CMN]=$\dfrac{p}{p+1} \cdot \dfrac{1}{n+1}$ S

A[PMN]=$\dfrac{mnp+1}{(m+1)(n+1)(p+1)}$ ≤1/4 necesar să demonstrăm că (m+1)(n+1)(p+1)≥8

(m+1)(n+1)(p+1)≥2 $\sqrt{m \cdot 1} \cdot 2\sqrt{n \cdot 1} \cdot 2\sqrt{p \cdot 1} = 8$ cu egalitate ⇔ m=n=p=1 ⇔ MNP triunghi median.

Bibliografie

Olimpiadele de matematică 2002- Editura Gil- Titu Andreescu, B. Enescu, A. Jorza, O. Pop.

Olimpiadele balcanice de matematică pentru juniori- D. Brânzei, I. Şerdean, V. Şerdean.

Olimpiadele de matematică 2000- 2001- Editura Gil- T. Andreescu, B. Enescu, M. Lascu, O. Pop.

Olimpiadele de matematică. Concursuri interjudeţene- Editura Paralela 45- D. Brânzei, Sorin Ulmeanu, V. Gorgotă, I. Şerdean.

Algebră. Geometrie cls. a VIII-a I. Negrilă, M. Negrilă- Editura Paralela 45- 2002.

Algebră. Geometrie. Olimpiade şi concursuri. A. Bălăucă- Editura Taida, Iaşi, 2002.

6. Poliedre

În cele ce urmează vom prezenta poliedrele regulate împreună cu aplicații reprezentative pentru fiecare. Considerăm definițiile poliedrelor cât şi formulele de calcul împreună cu proprietățile lor cunoscute.
Se doreşte dezvoltarea abilităților pur geometrice căt şi îmbinarea cu tehnici metrice.

Problemele propuse sunt exemplele vii de aplicații întâlnite la diferite etape ale concursurilor şcolare.

6.1 Poliedre regulate

Definiție: Se numeşte poliedru regulat un poliedru convex (nici un plan al unei fețe nu taie corpul), la care fețele sunt poliedre regulate egale.

Cubul, tetraedru regulat sunt poliedre regulate, deci definiția nu este lipsită de conținut.

Observații:

1) Unghiurile poliedre ale poliedrului regulat sunt congruente.
2) Un poliedru regulat poate fi înscris într-o sferă. Justificare: să considerăm două fețe având muchia comună AB. Perpendicularele pe aceste fețe, duse prin centrele poligoanelor respective sunt concurente în O. Rezultă OA=OB=OC=OD, deci O este centrul unei sfere care trece prin A,B,C,D. Parcurgând toate fețele poliedrului din aproape în aproape sfera rămâne aceeaşi.

Deducem usor

3) Un poliedru regulat poate fi circumscris unei sfere.

Prezentăm fără demonstrație un rezultat important prin consecința sa:

Teorema lui Euler: dacă V,M,F reprezintă respectiv numărul vârfurilor, muchilor şi fețelor unui poliedru convex atunci V+M-F=2.

Cosecință: există 5 tipuri de poliedre regulate

Demonstrație: Fie m –numărul muchiilor ce pornesc din acelaşi vârf şi l – numărul laturilor unei fețe; m,l≥3. Deducem numărul total al muchiilor care este:

$$M=\frac{1}{2}\,l\cdot F \text{ sau } M=\frac{1}{2}\,m\cdot V$$

Exprimând F şi V din aceste relații şi înlocuind în relația lui Euler F+V=M+2 obținem

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{M}$$

Vom cerceta

a)pentru care valori întregi (pozitive), superioare lui 2, date literelor, această relație este satisfăcută

b)dacă la fiecare soluție găsită corepunde efectiv un poliedru cu datele respective

a) Pentru l≥4, m≥4 obținem $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\leq\frac{1}{2}$ deci relația nu este satisfăcută. Rezultă că trebuie să luăm unul din numerele l,m egal cu 3. Pentru l=3 şi m≥6, obținem

$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ care nu convine. Rămâne să examinăm cazurile l=3, m=3 sau 4 sau 5 şi invers m=3, l=3 sau 4 sau 5.

Obținem următoarele 5 soluții:

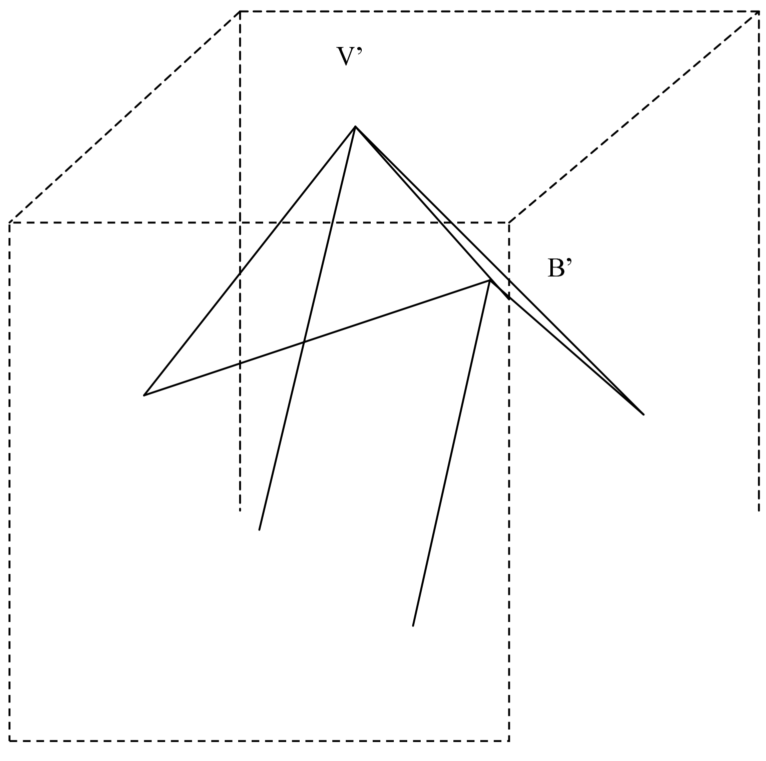
1 l=3, m=3, M=6 de unde F=4, V=4 caz ce corespunde tetraedreului regulat.

2 l=3, m=4, M=12 de unde F=8, V=8 caz ce corespunde octaedrului. Reprezentarea octaedrului imediată se poate realiza unind centrele fețelor unui cub.

3 l=3, m=5, M=30 de unde F=20, V=12 caz ce corespunde icosaedrului. Reprezentarea se realizează analog ca octaedru însă pornind de la poliedrul regulat numit dodecaedru de la cazul 5.

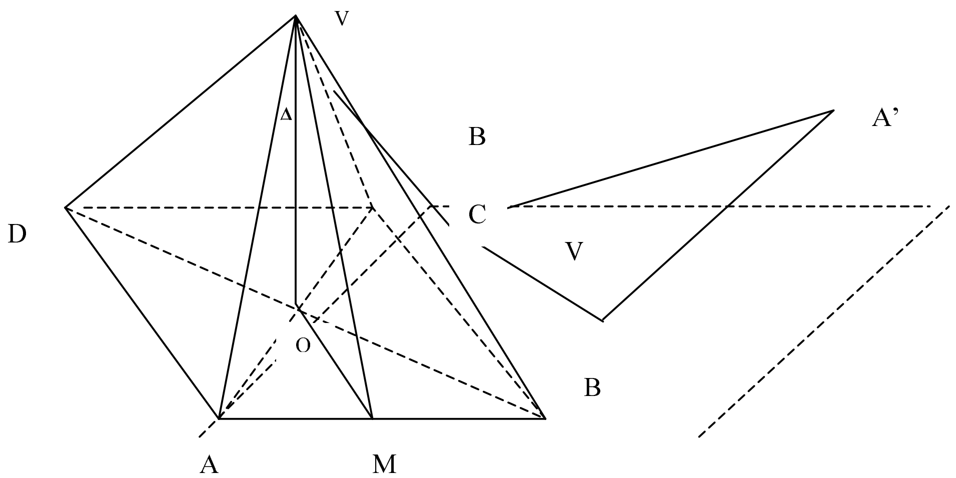
4 l=4, m=3, M=12 de unde F=6, V=8 caz corepunzator cubului.

5 l=5, m=3, M=30 de unde F=12, V=20 caz corespunzător dodecaedrului. Fețele laterale sunt pentagoane regulate.



OCTAEDRU

$$\cos\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



6.2. Prisma

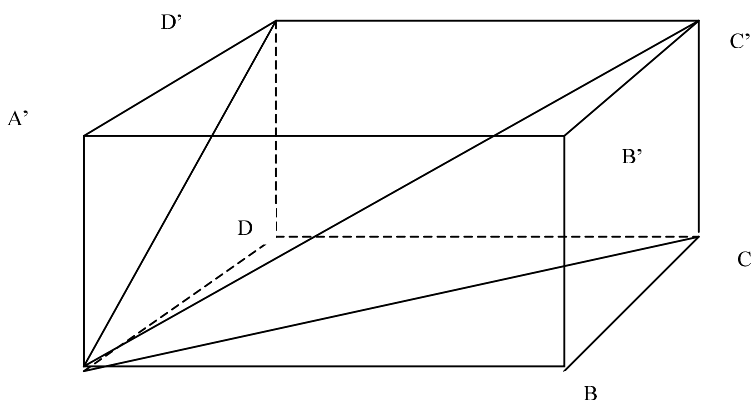
Probleme rezolvate

R62.1 Fie ABCDA’B’C’D’ un paralelipiped dreptunghic. Notăm cu α,β,γ unghiurile formate de diagonala [AC’] cu laturile [AB], [AD] şi [AA’], iar cu u,v,w unghiurile formate de AC’ cu planele (ABCD), (ABB’A’) şi (ADD’A’).

Să se arate că:

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma=1$
2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma =2$
3) $tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma \geq 6$
4) $\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}\geq 9$
5) $\cos^2 u +\cos^2 v +\cos^2 w=2$
6) $\sin^2 u +\sin^2 v +\sin^2 w=1$
7) $ctg^2 u + ctg^2 v + ctg^2 w\geq 6$

notăm AB=a; BC=b; CC’=c;



Soluție:

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$

2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2} = 2$

A

3) $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\gamma = \dfrac{b^2+c^2}{a^2} + \dfrac{a^2+c^2}{b^2} + \dfrac{b^2+a^2}{c^2}$

$= \left(\dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{b^2}\right) + \left(\dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{c^2}\right) + \left(\dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{b^2}\right) \geq 2+2+2 == 6$

4) $\dfrac{b^2+c^2+a^2}{a^2} + \dfrac{b^2+c^2+a^2}{b^2} + \dfrac{b^2+c^2+a^2}{c^2} = 3 + \left(\dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{b^2}\right) + \left(\dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{c^2}\right) +$
$\left(\dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{b^2}\right) \geq 3+2+2+2 = 9$

5) $\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w = \dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2} = 2$

6) $\sin^2 u + \sin^2 v + \sin^2 w = \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$

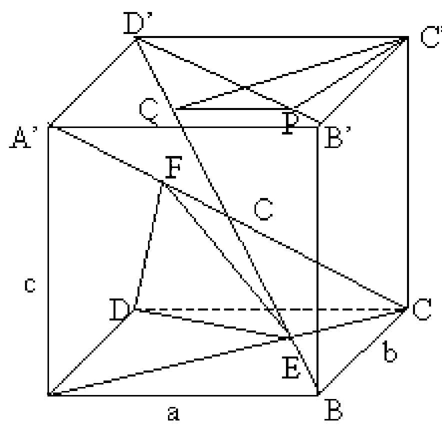
7) $\operatorname{ctg}^2u + \operatorname{ctg}^2v + \operatorname{ctg}^2w = \frac{b^2+c^2}{a^2} + \frac{a^2+c^2}{b^2} + \frac{b^2+a^2}{c^2} =$

$$= \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right) + \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) \geq 2+2+2=6.$$

R6.2.2. În paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' avem AB=a, BC=b, AA'=c. notăm cu E şi F proiecțiile punctului D pe AC, respectiv, pe A'C şi cu P şi Q proiecțiile punctului C' pe B'D', respective pe BD'. Arătați că planele (DEF) şi (C'PQ) sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $b^2=a^2+c^2$.

(Subiect unic- județeană 2001)

Soluție: Fie A'C $\cap$ BD'={0}. Avem A'C $\perp$ (DEF) si BD'$\perp$ (C'PQ)$\Leftrightarrow$ A'C$\perp$BD' de unde ΔBOC este dreptunghic. De aici $b^2=a^2+c^2$ şi reciproc.



R6.2.3.Fie ABCDA'B'C'D' paralelipiped dreptunghic. Fie G mijlocul segmentului (AB') şi {E}=A'C $\cap$ (AB'D'). Dacă EG$\perp$AB' arătați că ABCDA'B'C'D' este cub.

(Etapa finală ARAD-1994)

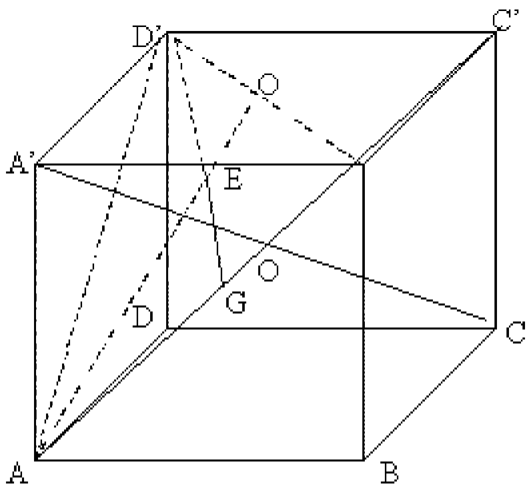
Soluție: Fie {O}=A'C' $\cap$ B'D' şi AB=a, BC=b, CC'=c. Rezultă imediat că {E}=AO $\cap$ AC'. În triunghiul ADB', AO şi D'G sunt mediane deci E este centrul de greutate al triunghiului AD'B'. Dar EG $\perp$ AB', deci ΔAB'D' este isoscel cu (AD')=(BD') de unde rezultă că $\sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{a^2+b^2}$ echivalent cu $a = c$ şi cu ABB'A' pătrat. De aici, AB' $\perp$ A'B, dar AB' $\perp$ BC deci AB' $\perp$ (A'BC) şi cum GE $\perp$ A'C iar A'C, EGC

(A'BC) din T3$\perp$ avem că AE $\perp$ A'C de unde $A'E=\frac{AA'^2}{A'C}=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ şi

$EC=\frac{AC^2}{A'C}=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ①

Dar A'O || AC implică ΔA'EO ~ ΔCEA echivalent cu $\frac{OA'}{AC}=\frac{A'E}{EC}=\frac{1}{2}$ ②.

Din ① şi ② rezultă că $\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{2}$ de unde $a^2+b^2=2c^2$ şi cum $a=c$ avem că $b=c$, deci ABCDA'B'C'D' – cub.



R6.2.4. Fie N, P centrele feţelor ABB'A' respectiv ADD'A' ale unui paralelipiped dreptunghic ABCDA'B'C'D' şi M∈(A'C), astfel încât A'M=1/3 din A'C. să se demonstreze că MN⊥AB' şi MP⊥AD, dacă şi numai dacă paralelipipedul este cub.

(Etapa naţională, 1996)

Soluţie: Fie AO'∩A'C={G}, unde O' este centrul feţei A'B'C'D'. Deducem că ΔA'GO'≈ΔCGA de unde rezultă A'G=1/2din GC rezultă că G=M, deci M ∈(AO'). Analog se arată că MO'=1/3din AO'. Deci M este centrul de greutate al ΔAB'D'.

Dacă MN⊥AB' şi MP⊥AD', atunci medianele [D'N] şi [B'P] sunt înălţimi în ΔAB'D', rezultă ΔAB'D' este echilateral. ΔAA'B' ≡ Δ ≡ ΔD'A'A' (C.I.) rezultă AA'=A'B'=A'D'.

R6.2.5. Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu muchia de lungime a. Se consideră punctele K∈[AB], L∈[CC'], M∈[D'A'].

a). arătaţi că $\sqrt{3}$ KL>=KB+BC+CL.

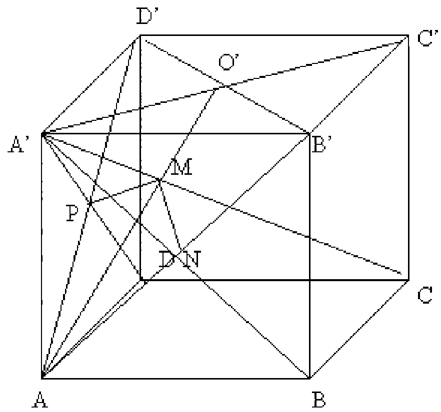
b). Arătaţi că perimetrul triunghiului KLM este mai mare strict decât 2a$\sqrt{3}$.

(Etapa judeţeană, 2002)

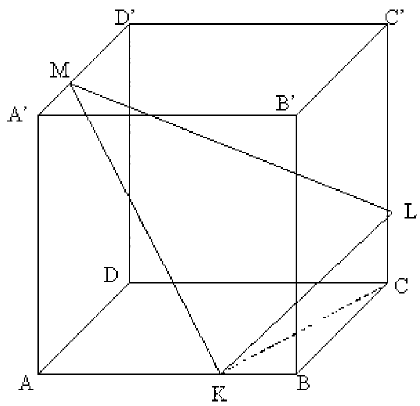
Soluție:

a) Avem $KL^2 = LC^2 + CK^2 = LC^2 + CB^2 + BK^2$.
Cum $3(x^2+y^2+z^2) >= (x+y+z)^2$, oricare ar fi $x,y,z \in R$, rezultă $3KL=3(KB^2+BC^2+CL^2)>(KB+BC+CL)^2$, adică $\sqrt{3}\,KL >= KB+BC+CL$.

b). Se obțin inegalitățile: $\sqrt{3}\,ML >= LC'+C'D'+D'M$, $\sqrt{3}\,MK >= MA'+A'A+AK$. Prin însumarea lor cu inegalitatea demonstrată la punctul a) obținem:
$\sqrt{3}\,(KL+LM+MK) >= (KB+AK)+(CL+LC')+(D'M+MA')+BC+C'D'+A'A=6a$ de unde $KL+LM+MK >= \frac{6a}{\sqrt{3}} = 2a\sqrt{3}$.
Egalitatea nu poate avea loc. Justificarea se face prin reducere la absurd. În caz contrar k de exemplu ar fi în B simultan cu A.
Desen pr.6.2.4.



Desen R6.2.5.



6.3.Piramida

6.3.1. Tetraedrul

Definiție: Se numeşte tetraedru echifacial un tetraedru ale cărei fețe au aceeaşi arie.
Să demonstrăm împreună proprietățile (caracterizările) :
P1: un tetraedru este echifacial dacă şi numai dacă cele patru înălțimi ale sale sunt congruente.
P2: Într-un tetraedru echifacial muchiile opuse sunt egale, iar bimedianele sunt perpendicularele comune a două muchii opuse.
P3: Cele patru mediane sunt egale.
P4: Suma distanțelor la fețele tetraedrului de la orice punct interior este constantă.
P5: Toate triunghiurile sunt ascuțitunghice.
P6: pentru tetraedrul SABC echifacial cu BC=a, AC=b, AB=c volumul este $\frac{\sqrt{2}}{12}$ $\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$.
P7: Centrul de greutate coincide cu centrul sferei circumscrise.
P8: Unghiurile diedre opuse sunt congruente.
P9: Suma unghiurilor plane de la acelaşi vârf este aceeaşi.
P10: Desfăşurarea tetraedrului se face după un triunghi asemenea cu cel al unei fețe.
P11: Centrul sferei înscrise coincide cu centrul sferei circumscrise.
Observație: Se ştie că tetraedrul este corespondentul triunghiului în spațiul cu trei dimensiuni. Dintre toate tetraedrele singurul care permite evidențierea unei multitudini de relații între elementele sale, urmărind cu fidelitate relațiile din geometria triunghiului este tetraedrul echifacial.

Probleme rezolvate

R6.3.1.1. Într-un tetraedru echifacial simetricul piciorului fiecărei înălțimi, față de centrul cercului circumscris feței în care se găseşte, este ortocentrul acestei fețe.

R6.3.1.2. Două tetraedre echifaciale ABCD şi A'B'C'D' sunt înscrise în două sfere concentrice. Fie P un punct al sferei circumscrise tetraedrului ABCD, iar P' un punct al sferei circumscrise tetraedrului A'B'C'D'. Să se arate că are loc relația:
$PA'^2+PB'^2+PC'^2+PD'^2=P'A^2+P'B^2+P'C^2+P'D^2$.

R6.3.1.3 dreptele suport ale medianelor tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ intersectează a doua oară sfera circumscrisă tetraedrului în punctele Bi, i=14.
Indicații:
p1) Exprimăm volumul în patru moduri
p2) Înălțimile corespunzătoare aceleiaşi muchii sunt congruente. Bimediana este perpendiculara comună a muchiilor opuse corespunzătoare, deci congruente

p3) Folosind p2 şi aplicând teorema medianei în spaţiu obţinem că medianele au aceeaşi lungime $\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

p4) Descompunem tetraedrul în patru tetraedre de baze echivalente şi scriem volumul în două moduri

p5) Presupunem contrariul. În cazul u° > 90° desfăşurăm tetraedrul şi reconstituim tetraedrul urmărind suprapunerea feţelor iar în cazul u° = 90° tetraedrul degenerează într-un triunghi

p6) Se duc paralele prin A la BC, prin B la AC şi prin C la AB, obţinând un tetraedru tridreptunghic cu volumul de patru ori mai mare decât ABCD

p7) Distanţele de la vârfuri la centrul de greutate sunt egale cu $\frac{3}{4}$ din mediană adică $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ deci G este centrul sferei circumscrise

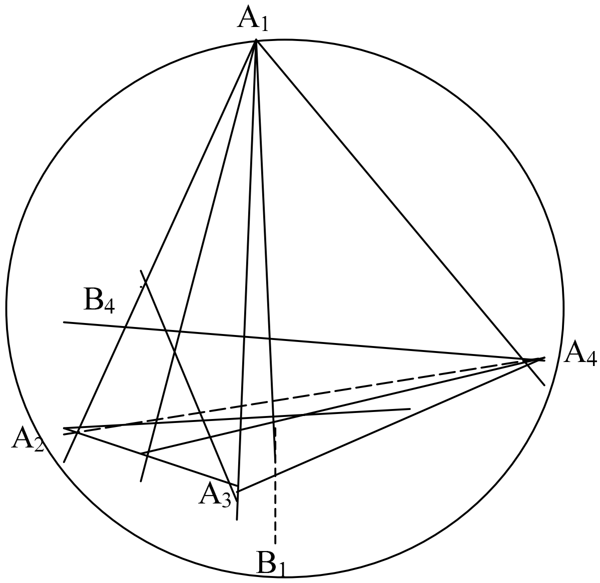
p8) Se pun în evidenţă două triunghiuri dreptunghice congruente cu catete înălţimi din vârfuri opuse

p9) Feţele sunt triunghiuri congruente. Se arată că suma este 180°

p10) Desfăşurarea în planul unei baze va fi un triunghi pentru care triunghiul bază va fi triunghiul median

p11) Deoarece feţele sunt triunghiuri congruente ele sunt înscrise în cercuri congruente din sfera circumscrisă. Însă distanţa de la centrul sferei la cercuri mici congruente este aceeaşi, deci centrul sferei circumscrise va coincide cu centrul sferei închise.

R6.3.1.3.



Soluție:

a) $GA_1 \cdot GB_1 = GA_2 \cdot GB_2 = GA_3 \cdot GB_3 = -\delta(G) = R^2 - OG^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{}$

$= \frac{1}{3}(GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2)$

Puterea lui G fata de sfera circumscrisă tetraedrului.
Aplicăm inegalitatea lui Cebâşev

$$3 \cdot (GA_1+GA_2+GA_3) \leq (GA_1^2+GA_2^2+GA_3^2)\left(\frac{1}{GA_1}+\frac{1}{GA_2}+\frac{1}{GA_3}\right) = 3(GB_1+GB_2+GB_3)$$

În inegalitate are loc egalitatea doar dacă $GA_1=GA_2=GA_3$ echivalent cu G=0 deci tetraedru va fi echifacial.

b)$GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3 \;\; GB_1 \cdot GB_2 \cdot GB_3 | \cdot GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3$

$GA_1^2 \cdot GA_2^2 \cdot GA_3^2 \leq (GA_1 \cdot GB_1)(GA_2 \cdot GB_2)(GA_3 \cdot GB_3)$ sau

$[2(a_2^2+a_3^2)-a_1^2] \cdot [2(a_1^2+a_3^2)-a_2^2] \cdot [2(a_1^2+a_2^2)-a_3^2] \leq (a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2$

Aplicând inegalitatea mediilor, avem că:

$$\sqrt[3]{[2(a_2^2+a_3^2)-a_2^2][2(a_1^2+a_3^2)-a_2^2][2(a_1^2+a_2^2-a_3^2]} \leq \frac{[2(a_2^2+a_3^2)-a_1^2]+[2(a_1^2+a_3^2)-a_2^2]+[2(a_1^2+a_2^2)-a_3^2]}{3}$$

Se verifică din nou cazul de egalitate echivalent cu G=0.

R6.3.1.4 Se desfăşoară tetraedrul obținându-se perimetrul suma a trei laturi într-un patrulater mai mare strict decât a patra latură de lungime $2 \cdot BC$.

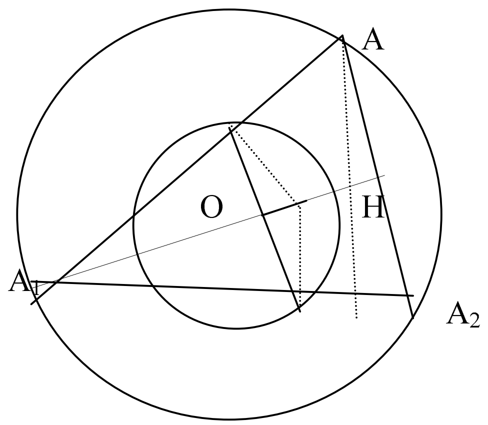
R6.3.1.2 Deoarece tetraedrele sunt echifaciale cu sfere circumscrise concentrice avem G=G'=O=O' şi notând razele celor două cercuri cu R şi R' aplicăm relațiile lui Leibuiz obținând

$$P'A^2+P'B^2+P'C^2=3P'O^2+OA^2+OB^2+OC^2=3(R^2+R'^2)$$

analog $PA'^2+PB'^2+PC'^2=3(R^2+R'^2)$ etc.

R6.3.1.1 Enunț: Fie ABCD un tetraedru echifacial. Notăm cu A' proiecția punctului A pe planul (BCD). Demonstrați că H este simetricul ortocentrului triunghiului BCD față de centrul cercului circumscris ΔBCD.

Soluție: Desfăşurăm tetraedrul în planul (BCD). Ortocentrul ΔBCD este centrul cercului circumscris ΔAA_1A_2 Proiecția lui A pe planul (BCD) coincide cu ortocentrul ΔAA_1A_2. Centrul cercului circumscris ΔBCD este centrul cercului lui Euler asociat ΔAA_1A_2 Se cunoaşte că centrul w este mijlocul segmentului OH.



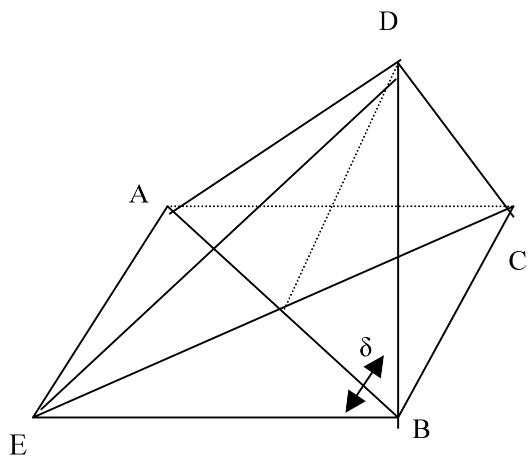
Unghiul a două muchii opuse într-un tetraedru

R6.3.4. Se consideră ABCD un tetraedru şi δ unghiul format de dreptele AC şi BD.

Să se arate că are loc relaţia:

2 AC· BD| cosδ|=|AD^2+BC^2-AB^2-CD^2|

Soluţie: R6.3.4.



Se consideră punctul E−∈ (ABC) astfel încât ACBE paralelogram şi

AB∩EC={O}. În ΔDEC şi ΔDAB se aplică teorema medianei

pentru DO şi se egalează.

Rezultă DE^2=AD^2+BD^2+BC^2+AC^2-AB^2-CD^2

Teorema cosinusului aplicată În ΔDBE combinată cu

Expresia lui DE^2 dau relaţia dorită:

$$\cos\delta=\frac{BD^2+EB^2-ED^2}{2BD\ EB}$$

2BD· AC cosδ=BD^2+AC^2-AD^2-BD^2-BD^2-AC^2+AB^2+CD^2

2BD· AC cosδ=AB^2+CD^2-AD^2-BC^2

Definiţie:

Se numeşte tetraedru ortocentric un tetraedru în care muchiile opuse sunt perpendiculare

Exemplu de tetraedru ortocentric: secţiunea determinată de un plan într-un triedru tridreptunghic este baza unui tetraedru ortocentric.

Proprietăţi şi caracterizări ale tetraedrului ortocentric

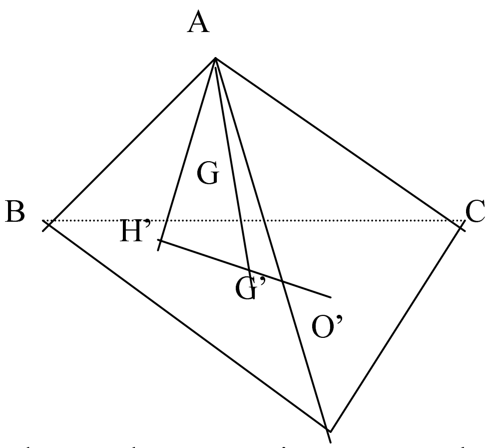
P1. ABCD tetraedru ortocentric dacă şi numai dacă:

(1)AB$\perp$CD; AC$\perp$BD; (este suficient numai două perechi de muchii să fie perpendiculare)
(2)$AB^2+BC^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$;
(3)[MN]≡ [PQ] ≡ [RS] unde M,N,P,Q,R,S mijloacele muchiilor [AB],[CD],[BC],[AD],[AC],[BD];
(4)$DA\cdot BD\cdot\cos(ADB)=DB\cdot DC\cdot\cos(BCD)=DC\cdot DA\cdot\cos(CDA)$
(5)proiecția unui vârf pe fața oopusă coincide cu ortocentrul acelei fețe.
P2. Se numeşte biînălțime a unui tetraedru perpendiculara comună a două muchii opuse. Demonstrați că biînălțimile într-un tetraedru ortocentric sunt concurente în ortocentrul tetraedrului.
P3 Bimedianele unui tetraedru ortocentric sunt congruente.
P4 Mijloacele muchiilor unui tetraedru ortocentric se găsesc pe o sferă cu centrul G şi raza $\frac{1}{4}\sqrt{AB^2+CD^2}$ numită sfera lui Vogt a tetraedrului ortocentric.
P5 Într-un tetraedru ortocentric ortocentrul, centrul de greutate şi centrul sferei circumscrise tetraedrului sunt coliniare.
P6 Într-un tetraedru ortocentric centrul de greutate al tetraedrului se proiectează in centrele cercurilor lui Euler ale fețelor.

P1(1)Se arată că BC$\perp$ (AA_1D) unde $A_1=pr_{(BCD)}A$
(2) Se consideră M,P,N,Q,R,S mijloacele muchiilor [AB],[BC],[CD],[DA],[AC],[BD] respectiv MPNQ dreptunghi. Din egalitatea diagonalelor rezultă $MP^2+PN^2=RQ^2+QS^2$ şi folosind apoi proprietatea liniei mijlocii rezultă concluzia. De aici rezultă şi P3 şi (3).
(4)Aplicăm teorema cosinusului şi folosim (2).
(5)Din demonstrația (1).
P2 Este suficient să se demonstreze că două câte două înălțimile sunt concurente.

De exemplu AA_1 şi BB_1; CD$\perp$ (AA_1B). Dar (AA_1B)$\cap$ (BB_1A)=AB deci au dreaptă comună.
Din unicitatea planului perpendicular pe o dreaptă dată într-un punct rezultă că (AA_1B)= (BB_1A), deci AA_1 şi BB_1 sunt concurente.
P5 H,G,O se află în planul perpendicular pe fața (BCD) după dreapta lui Euler a ΔBCD si analog se află în planul perpendicular pe fața (ABC) după dreapta lui Euler a ΔABC
P4 Din configurația de la P1 şi P2.
P6 Fie tetraedrul [ABCD], şi H',G',O' ortocentrul, centrul de greutate şi centrul cercului circumscris al ΔBCD, [H'G']=2/3 H'O', mediana AG' a tetraedrului, G$\in$ [AG'] centrul de greutate al tetraedrului (AG'=4GG') şi fie G'' proiecția lui G pe planul (BCD). Evident G" $\in$[H'O']. Se va demonstra că G" mijlocul segmentului [H'O'], deci este centrul cercului lui Euler al feței (BCD).

ΔAH'G'~ΔGG"G' avem G'G"/G'H'=G'H/G'A=$\frac{1}{4}$ de unde $\frac{H'G' - HG''}{G'H'}=\frac{1}{4}$ Se obține (2/3H'O'-H'G")/(2/3H'O')=1/4 şi apoi H'G"=1/2H'O'.



Observaţie:
Un alt caz particular de tetraedru ortocentric este trapezul tridreptunghic verificând proprietăţi speciale.
Definiţie: Un tetraedru ortocentric se numeşte tridreptunghic dacă ortocentrul coincide cu un vârf al tetraedrului.
Proprietăţi:
1)OABC un tetraedru tridreptunghic cu ortocentrul O. Atunci $A_{[ABC]}^2 = A_{[ABO]}^2 + A_{[BCO]}^2 + A_{[ACO]}^2$

2) $\dfrac{1}{[d(O;ABC)]^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

Soluţii: 1)Notăm muchiile tetraedrului cu a,b,c şi exprimăm fiecare arie;
2)Dem. că $OH \perp (ABC)$, H ortocentrul triunghiului ABC

R6.1.5.Din mijlocul înălţimii piramidei triunghiulare regulate se duc perpendiculare pe o muchie laterală şi pe o faţă laterală de lungime p respectiv q. Determinaţi volumul piramidei.

R6.1.6.Să se arate că tetraedrul în care înălţimile sunt congruente iar una dintre ele trece prin ortocentrul feţei opuse este regulat.

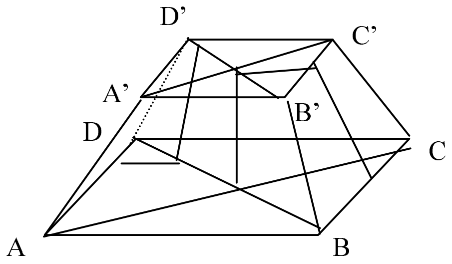
R6.1.6.Baza unei piramide patrulatere cu vârful în S este paralelogramul ABCD. Arătaţi că:
a)ABCD dreptunghi$\Leftrightarrow SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$
b)Dacă muchiile laterale formează unghiuri egale cu o semidreaptă SO situată în interiorul unghiului triedru SABCD atunci SA+SC=SB+SD.

Soluţie:
R6.1.6.Fie ABCD tetraedrul, H ortocentrul bazei (BCD) $\{E\}=BH\cap CD$, $B1=pr_{AE}B$ rezultă $BB_1\perp(ACD)$ iar volumul tetraedrului $S_{BCD}\cdot AH/3=1/6CD\cdot BE\cdot AH=1/3\ S_{ACD}B_1B= 1/6CD\cdot AE\cdot BB_1 \Rightarrow [BE]\equiv[AE]$. $\Delta BCE\equiv\Delta ACE\equiv\Delta BDE\equiv\Delta ADE \Rightarrow BC=AC$ şi $BD=AD$ analog pentru înălţimile din A şi C si A si D
R6.1.7a)Dacă O' este intersecţia diagonalelor se aplică teorema medianei in ΔSAC şi ΔSBD.

b)Dacă muchiile laterale fac unghiuri egale cu SO, atunci se ia un plan perpendicular pe SO, care taie muchiile laterale în A_1,B_1,C_1,D_1 când avem S $A_1=SB_1=SC_1=SD_1$. Are loc egalitatea volumelor:

$V_{SB1C1D1}+V_{SA1B1C1}= V_{SA1C1B1}+ V_{SA1D1C1}$, unde

$V_{SB1C1D1}=SB_1\cdot SC_1\cdot SD_1/SB\cdot SC\cdot SD\ V_{SBCD}=1/3h(SA_1\cdot SB_1\cdot SC_1\cdot SD_1/SA\cdot SB\cdot SC\cdot SD)\cdot SA/SA_1\cdot S_{BCD}$, unde h este înălțimea piramidei SABCD. Se explicitează analog şi celelalte volume şi cum $S_{BCD}= S_{ABD}=S_{ABC}= S_{ADC}$ rezultă că SA+SC=SB+SD.



R6.1.5 Soluție:Utilizând teorema a II-a a înălțimii în ΔVON respective ΔVOC obținem

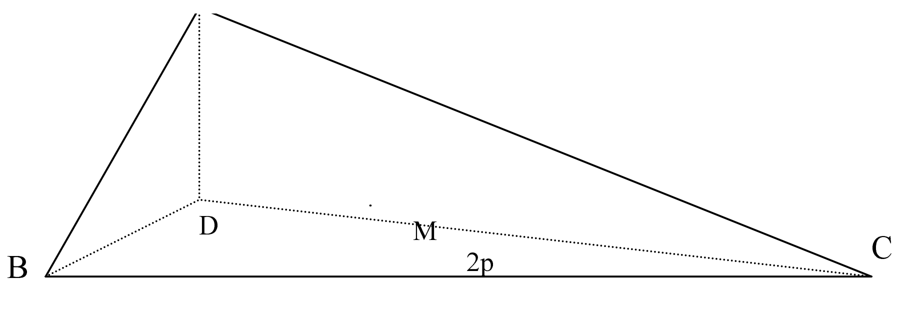
$$h=\frac{a\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{(4q^2-p^2)*3}}$$ cu a lungimea laturii bazei.

Scriind în două moduri aria ΔVNC obținem $a=\frac{4pq}{\sqrt{p^2-q^2}}$

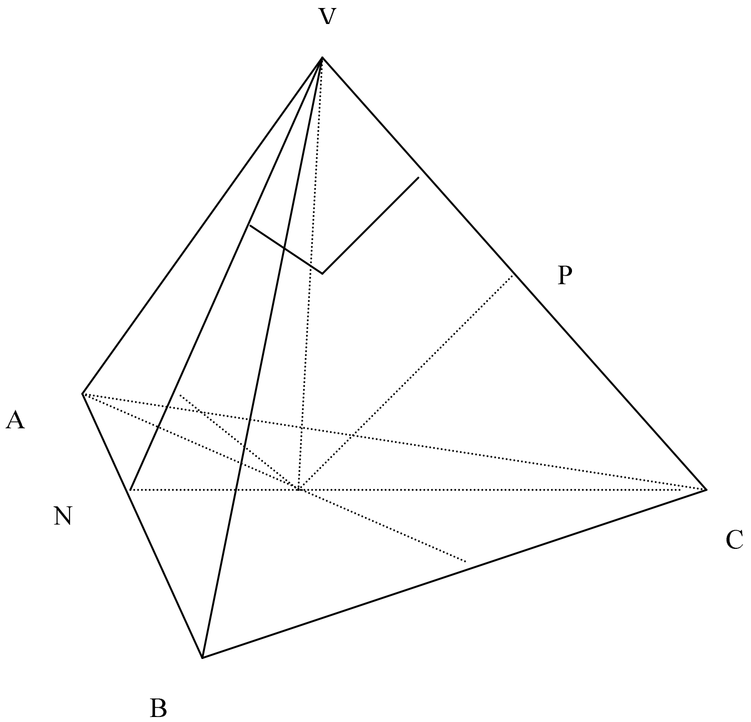
$$V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}*\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{3*}\sqrt{4q^2-p^2}}=\frac{\sqrt{3}}{12}*\frac{64p^3q^3}{(p^2-q^2)\sqrt{p^2-q^2}}*\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{3}*\sqrt{4q^2-p^2}}$$

Descompunerea ariei se face astfel.

$A_{[VNC]}-A_{[MNC]}=A_{[MNV]}+A_{[VMC]}$.



O



6.4. Trunchiul de piramidă

Probleme rezolvate

R6.4.1. Muchiile laterale ale unui trunchi de piramidă patrulateră regulată face cu planul bazei un unghi α cu $tg\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .Să se arate că fetele laterale opuse sunt perpendiculare.

R6.4.2. Muchia laterală a unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată face cu planul bazei un unghi α. Determinați volumul trunchiului dacă laturile bazelor sunt a,b (a>0).

Soluții: R6.4.1. $tg\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ echivalent cu $\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, unde x lungimea proiecției muchiei laterale pe planul bazei. Această proiecție este ipotenuză în triunghiul dreptunghic isoscel format cu muchia bazei mari. Deci $\sqrt{2}$ y=x. Notând cu δ unghiul feței laterale cu planul bazei obținem tg δ =1 deci δ =45.

R6.4.2. Obținem $h = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{3}\,tg\alpha$

Bibliografie

[1] *Manual pentru clasa a X-a* – M1- MIRCEA GANGA, Editura MathPress, Ploieşti, 2000
[2] *Olimpiade şi concursuri* – ARTUR BĂLĂUCĂ, Editura Taida,Iaşi 2002
[3] *600 de probleme* – CRISTINEL MORTICI, Editura GIL-Zalău, 2001
[4] *Şi TU poţi învăţa geometria* – IOAN DANCILĂ, Editura Teora, 1993
[5] *Analogii Triunghi-Tetraedru* – MIHAI MICULITA, DAN BRÂNZEI, Editura Paralela 45, 2000
[6] *Probleme de geometrie* – GHEORGHE TITEICA, Editura Tehnică,1974.
[7] *Matematica în examene şi concursuri* – coord. DUMITRU VÂLCAN, Editura OPTILGRAPHIC, Craiova 2002.

7. Corpuri rotunde

Rezumat: În aceasta temă ne propunem ca elevii capabili de performantă să-şi antreneze rationamentul în contextul unor aplicatii viziune geometrică,şi generalizarea unor situatii întâlnite.

În multe din lista de aplicatii propuse numerele sunt înlocuite cu litere pentru a stimula familiarizarea elevului cu contextual general,dezvoltându-i o perspectivă globală asupra corpurilor rotunde.

Nu lipsesc şi probleme în care solide plane se rotesc în jurul unor axe alese concret!

7.1. Cilindrul

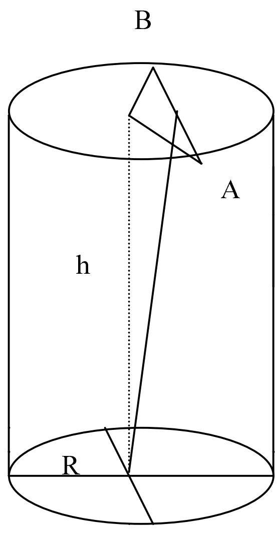
Probleme rezolvate

R7.1.1. Dintr-o bară de oțel sub forma unui cilindru se strunjeşte o sferă cu raza c. Dacă raza cilindrului este a şi înălțimea este 2a si $a^3+b^3+c^3-3abc=0$. Să se afle ce procent din oțel se pierde prin prelucrare.

(G.M.S!1994 Eugen Spachu)

Soluție: $a^3+b^3+c^3=3abc$; $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}=\sqrt[3]{a^3b^3c^3}$; deci a=b=c. Volumul cilindrului este $2\pi a^3$ si volunul sferei $\frac{4\pi a^3}{3}$.Prin prelucrare se pierde 33,(3)% din volumul cilindrului.

R7.1.2. Planul ce trece prin centrul bazei inferioare a unui cilindru face cu planul bazei unghiul α şi intersecteaza baza superioara tăind o coarda de lungime b si care subântinde un arc de mărime β.Se cere volumul cilindrului.



Solutie: Exprimăm R în funcție de β/2 şi b/2 in ΔO_1MB dreptunghic in M obținând $R=\frac{b}{2}*\frac{\beta}{2}$

În ΔO_1O_2M dreptunghic in O_1 si cu m($\angle O_1MO_2$)=α (planele bazelor sunt paralele) exprimăm înaltimea h=O_1O_2 h=$O_1Mtg\alpha$

Însă $\mathbf{O_1M}=\mathbf{R}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\mathbf{b}}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$

Aşadar. h=$\frac{\mathbf{b}}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\mathbf{tg}\alpha$

Volumul cilindrului este: $\mathbf{V_c} = \pi\mathbf{R}^2 \cdot \mathbf{h} = \pi \cdot \frac{\mathbf{b}^2}{4} \cdot \sin^2\frac{\beta}{2} \cdot \frac{\mathbf{b}}{2}\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \mathbf{tg}\alpha$

$= \pi \cdot \frac{\mathbf{b}^3}{8} \cdot \sin^3\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \mathbf{tg}\alpha$.

Soluție:
a)Înălțimea dupa k operații

este $7 + \frac{7}{2} + \frac{7}{2^2} + ... + \frac{7}{2^k} = 7(2 - \frac{1}{2^k}) = 14 - \frac{7}{2^k}$,__k$\in N^*$!

b)Volumul coloanei este $\pi \cdot 4 \cdot 7(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + ... \frac{1}{2^{3k}}) = \pi \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{2^{3k+3} - 1}{7 \cdot 2^{3k}}$ de unde

$\frac{2^{33} - 1}{2^{28}} = \frac{2^{3k+3} - 1}{2^{3k-2}}$ cu k=10.

R.7.1.3.Înălțimea unui cilindru este 16,raza bazei este 10.Capetele unui segment de 20 se află pe circumferințele celor doua baze.Să se determine distanța de la acest segment la axa cilindrului.

Soluții: PR.7.1.3.Determinarea perpendicularei commune:

Ducem AA'-generatoarea din A

Fie $O_2M \perp A'B$,evident M mijlocul coardei A'B

Deoarece $AA' \perp (A'BO_2), AA' \perp O_2M$ cu $O_2M \perp A'B$

rezultă că $O_2M \perp (ABA')$,deci inclusive pe AB. Intersecția planului (O_1O_2M) cu(AA'B)este MN cu N$\in AB$ (mijlocul lui AB).Ducem NP$\parallel MO_2$ și deducem că PN$\perp O_1O_2$ (PN$\parallel O_2M$) și PN$\perp AB$ ($O_2M \perp AB$).Deci NP este perpendiculară comună. Calculul distanței:

$O_2M \equiv PN$ vom calcula O_2M

În $\Delta AA'B$ dreptunghic in A' avem A'B=$\sqrt{400 - 256}$ =12

În $\Delta O_2MA'$ dreptunghic in M avem $O_2M = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$.

PR.7.1.4.O suprafață dreptunghiulară de dimensiuni a și b se rotește o dată in jurul laturii de lungime a și apoi în jurul celei de lungime b. Se cere:
1)raportul ariilor laterale ale corpurilor obținute.
2)raportul ariilor totale ale corpurilor obținute;

Soluție PR. 7.1.4.
Notând:

$R_1 = a; h_1 = b$ avem $R_2 = b \quad h_2 = a$

$A_{l1} = 2\pi R_1 h_1 = 2\pi ab$ $\qquad$ $A_{l2} = 2\pi R_2 h_2 = 2\pi ab$

$A_{t1} = 2\pi ab + 2\pi a^2$ $\qquad$ $A_{t2} = 2\pi ab + 2\pi b^2$

a) $\frac{A_{l1}}{A_{l2}} = \frac{2\pi ab}{2\pi ab} = 1;$

b) $\frac{A_{t1}}{A_{t2}} = \frac{2\pi ab + 2\pi a^2}{2\pi ab + 2\pi b^2} = \frac{2\pi a(a+b)}{2\pi b(a+b)} = \frac{a}{b};$

7.2.Conul

7.2.1. Aria totală a unui con este S, iar unghiul de la vârful secțiunii axiale α.Să se determine volumul conului. (cazuri particulare α=90,α=30)

Soluție:

(1)S=$\pi R(R+G)$. În ΔVOB dreptunghic in O şi cu m($\angle OVB$)=$\frac{\alpha}{2}$,obținem

G=$\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.Înlocuind în (1) $\pi R(R+\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}) = S$ obținem $R^2 = \frac{S\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi(\sin\frac{\alpha}{2}+1)}$

În acelaşi triunghi VO=h=R*ctg$\frac{\alpha}{2}$ Aşadar volumul:

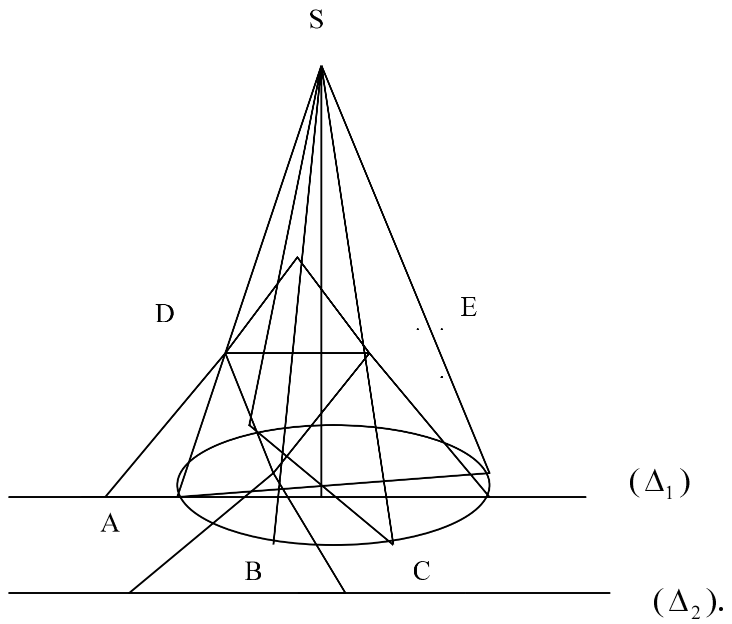
V=$\pi R^2 * h/3 = \frac{\pi}{3} * \frac{S\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi(\sin\frac{\alpha}{2}+1)} * \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} * \sqrt{\frac{S\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi(\sin\frac{\alpha}{2}+1)}}$

$= \frac{S\sqrt{S}\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}}{3(\sin\frac{\alpha}{2}+1)\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}+1}}.$

7.2.2.Se consideră un con circular drept cu vârful S,bază cercul (C')şi punctele A,B,C $\in$(C'),D$\in$[SA],E$\in$[SC], $M_1, M_2 \in$[SB].Ştiind că [BM_1]≡[AD]≡[CE]≡[BM_2] şi notând cu(Δ_1),respective(Δ_2)intersecțiile planelor(M_1DE)şi (M_2DE)cu planul bazei conului să se arate că(Δ_1)este paralelă cu(Δ_2).

(G.M.5!1981,Ion Voicu)

Soluție:Se arată că DE $\parallel$ AC,AC $\subset \alpha, (M_1DE) \cap \alpha = (\Delta_1)$ $(M_2DE) \cap \alpha = (\Delta_2)$ rezultă că avem () $\parallel$ DE,(Δ_2) $\parallel$ DE şi din tranzitivitate rezultă (Δ_1) $\parallel$ (Δ_2).



7.2.3 Se consideră conul circular drept având raza de 4 cm.Determinați aria laterală şi volumul conului ştiind că acesta are 2 generatoare care formează un unghi de 30° şi că ele impart suprafața laterală a conului în 2 părți având raportul ariilor egal cu 1/5.

(Artur Bălăucă)

Soluție: Fie generatoarele VM şi VN care împart suprafața laterală în două părți astfel încât $S_{VAMN} / S_{VBMN} = 1/5,$ de unde rezultă că $\mathbf{m}(\angle \mathbf{MBN}) = 5 \cdot \mathbf{m}(\angle \mathbf{MAN})$,deci m($\angle MAN$)=60° şi MN= l_4 =R=4cm. Aplicând teorema cosinusului în ΔVMN avem: $\mathbf{MN}^2 = \mathbf{VN}^2 + \mathbf{VM}^2 - 2\mathbf{VN} \cdot \mathbf{VM} \cdot \cos 30^\circ$ obținem $VN = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$ .Din ΔVMO dreptunghic rezultă că VO=4 $\sqrt{\sqrt{3}+1}$. deci $S_1 = \pi RG = 16\sqrt{2+\sqrt{3}}\pi$ cm ^{2} şi V= $\frac{1}{3} \cdot 64\sqrt{\sqrt{3}+1}\pi$ cm ^{3}.

7.2.4.În triunghiul isoscel ABC ([AB]≡[AC]), se duce $MN \| AC, M \in (AB), N \in (BC)$.Ştiind că AM=x-2,AB=5x-10,BC=4x+12,NC=x cm, se cere:
a)Perimetrul,aria şi unghiurile triunghiului ABC
b)Volumul şi aria corpului obținut prin rotirea triunghiului in jurul dreptei CC',perependiculară pe BC.

(G.M.3!1980)

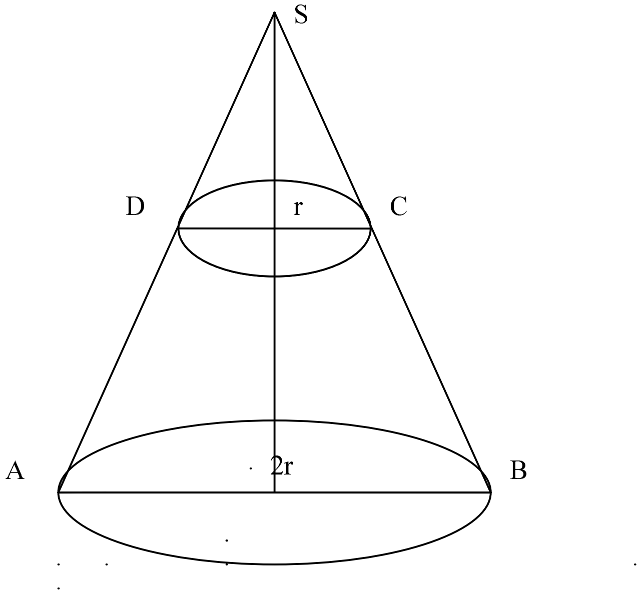
Soluție:a)ΔBAC≈ΔBMN.Se obține
x=12,AB=AC=50cm,BC=60cm,P=160cm,A=1200cm,h=40cm etc.
b)Volumul este egal cu $\frac{\pi \mathbf{h}}{2} \cdot \mathbf{BC}^2 = 72000\mathbf{cm}^3$ iar aria corpului este egală cu $9600\,\pi ccm^2$.

7.2.5. Un con circular drept cu generatoarea G are trei generatoare perpendiculare două câte două.Aflați volumul conului şi aria sferei înscrise în con.
Soluție:Înălțimea este distanța de la vârful tetraedului tridreptunghic format cu muchiile perependiculare $2 \cdot 2$ de lungime G.După calcul obținem h=$G\sqrt{3}/3$.
V=$\frac{\pi \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{R}^2}{3} = \frac{\pi \cdot \mathbf{G}\sqrt{3}/3 \cdot \mathbf{G}\sqrt{6}/3}{3} = \pi \mathbf{G}^2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{27} = \frac{\sqrt{2}\mathbf{G}^2\pi}{9}$ (R se calculează ca raza cercului circumscris Δechilat. de latură G $\sqrt{2}$).Raza sferei înscrise coincide cu raza cercului înscris intr-o sectiune axială cu laturile G,G, $\frac{2G\sqrt{6}}{3}$,determinându-se cu formula S=p$\cdot$ r,adică r=S/p etc.

7.3. Trunchiul de con

R7.3.1 Volumul unui trunchi de con este 28, iar aria unei baze este de 4 ori mai mare decât aria celeilalte. Să se determine volumul conului din care face parte trunchiul de con.

<u>Soluție:</u> Obținem $K = \frac{1}{2}$ rezultă $\frac{Vt}{Vc} = \frac{7}{8}$ rezultă $Vc = \frac{8}{7} \cdot 28 = 32$



R7.3.2 Generatoarea unui trunchi de con este egală cu l şi face cu planul bazei mari un unghi de 60 grade. Să se determine aria totală a trunchiului de con dacă raportul ariilor bazelor este 9.

<u>Soluție:</u> Notăm cu r raza bazei mici, deducem R = 3r si apoi $\frac{l}{4} = r$

$$At = \pi - l(\frac{3l}{4} + \frac{l}{4}) + \pi\frac{9l^2}{4^2} + \pi\frac{l^2}{16} = \pi l^2 + \frac{10r^2}{16} = \frac{26l^2\pi}{16}$$

R7.3.3 Aria laterală a unui trunchi de con circular drept este 30 (m^2), volumul de 31 . m^3), iar înalțimea 3m. Să se calculeze lungimile razelor bazelor si lungimea generatoarei.

$$R + r = \frac{30}{G}$$

<u>Soluție:</u> Obținem sistemul:

$$R^2 + r^2 + Rr = 31$$

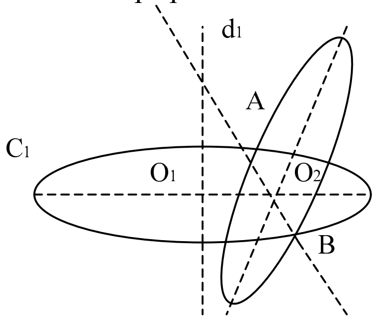
$$R^2 + r^2 - 2Rr + 9 = G^2$$

$$\begin{array}{l} R + r = 6 \\ R \cdot r = 1 \end{array} \Rightarrow$$ R=5cm ; r=1cm şi G=6cm

7.4. Sfera

R7.4.1. Două cercuri nu se află în acelaşi plan. Ele se intersectează în două puncte diferite
A şi B. Să se arate că există o singură sferă care le conţine.

<u>Soluţie</u>: -Locul geometric al centrelor sferelor ce conţin cercul C1 este perpendiculară în centrul cercului pe planul acestuia . Notăm dreapta cu d_1. Analog obţinem dreapta d_2.



Dreptele d_1, d_2 sunt:

- coplanare fiind conţinute în planul determinat de diametrele perpendiculare pe coarda [AB] în fiecare cerc.

-în ipoteză ca cercurile nu se află în acelaşi plan dreptele d_1 şi d_2 sunt concurente în centrul sferei căutate.

R7.4.2. Se consideră în spaţiu 6 puncte diferite. Se ştie că oricare cinci dintre ele se află
pe o sfera . Să se arate că toate cele şase puncte se află pe aceeaşi sferă. Generalizare.

Soluţie: Analizăm două cazuri:

1. Dacă orice patru din cele şase sunt necoplanare. Patru puncte necoplanare determină o sferă mică. Din enunţ, înca un punct se află pe această sferă. Al şaselea luat cu cele patru care determină sfera este pe aceeaşi sferă.
2. Orice patru puncte din cele patru se afla în acelaşi plan. Orice trei nu se află pe o dreaptă (deoarece se află pe o sferă). Toate se află pe acelaşi cerc care aparţine unei sfere.

R7.4.3. Să se arate că dacă trei sfere au un cerc comun, atunci centrele lor sunt coliniare.

<u>Soluţie:</u> Notăm cu O_1 , O_2 , O_3 şi O centrele sferelor respective şi secţiunii comune, atunci $O_1O \perp \alpha$.$O_2 O \perp \alpha$, $O_3 O \perp \alpha$, unde α este planul cercului comun.

R7.4.4 Două sfere disjuncte S_1 şi S_2 sunt tangente la o a treia sferă S_3 în punctele A si B.
Fie M un punct pe sfera S_1 ; dreapta MA intersectează a doua oară sfera S_3 în punctul N, iar dreapta NB intersectează a doua oară sfera S_2 în P. Să se arate că dacă dreapta MN este tangentă sferei S_2 , atunci ea este tangentă şi sferei S_1.

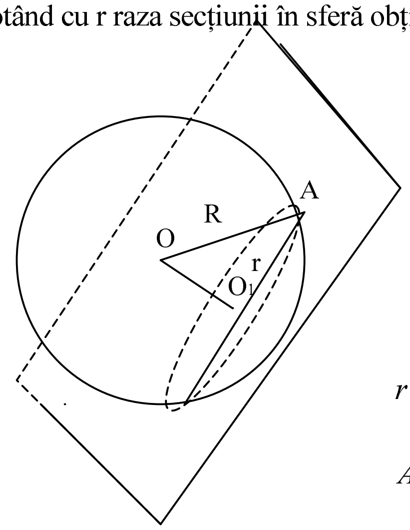
Soluţie: Se studiază întâi cazul când S_1 şi S_2 sunt tangente exterioare la S_3 şi se consideră secţiunea sferelor date pentru planul ce trece prin punctele M,P, A, B. Din <) MPB $\equiv$ <)BAN rezultă <) AMB $\equiv$ <)ABN. Analog in celelalte cazuri.

R7.4.5 Se duce un plan prin extremitatea unei raze a unei sfere, care face cu raza un unghi de 30 grade . Dacă sfera are raza R, să se determine aria secţiunii realizate de plan în sferă.

Soluţie: <) (OA; a) = <)OAO_1 pentru că

pr_α OA = AO_1cunoscând că

O_1 = prO.Notând cu r raza secţiunii în sferă obţinem:



$$r = R\cos 30^0 = R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$As = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot R^2\cdot\frac{3}{4} = \frac{3^2 R^{2\pi}}{4}$$

R7.4.6 Două sfere de centre O si O_1 şi raze R si R_1; $R_1 < R$ sunt tangente exterior. Să se afle aria laterală a trunchiului de con ce are ca bază cercurile de tangenţa cu cele două sfere ale conului circumscris sferelor.

Soluţie: $4\pi R R_1$

R7.4.7 Fie SABC un tetraedru. O sfera care trece prin S taie muchiile SA, SB, SC în punctele M, N respectiv P. Fie O centrul sferei circumscrise tetraedrului SMNP. Dacă SO $\perp$ (ABC), atunci patrulaterele BCPN, ACPM şi BAMN sunt inscriptibile.

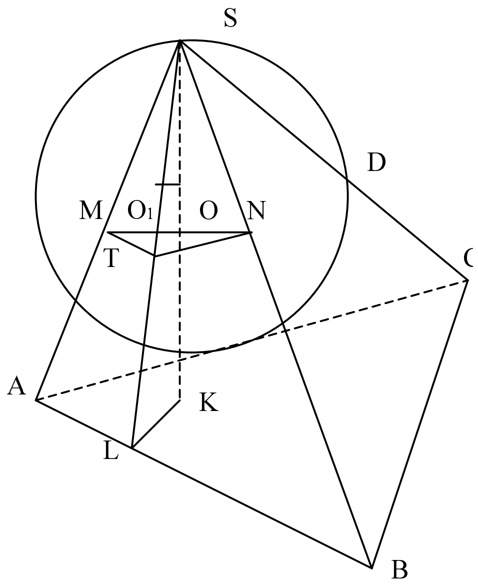
Solutie: Fie{k}= SO intersectat (ABC) şi cum SO $\perp$ (ABC) rezultă SK$\perp$ AB (1).

Notăm cu L = pr_{AB}K şi deci KL$\perp$AB (2). Din (1) şi (2) rezultă că AB$\perp$ (SLK), deci (SLK)$\perp$(SAB) şi pe de altă parte conform T3$\perp$, SL$\perp$AB (3).

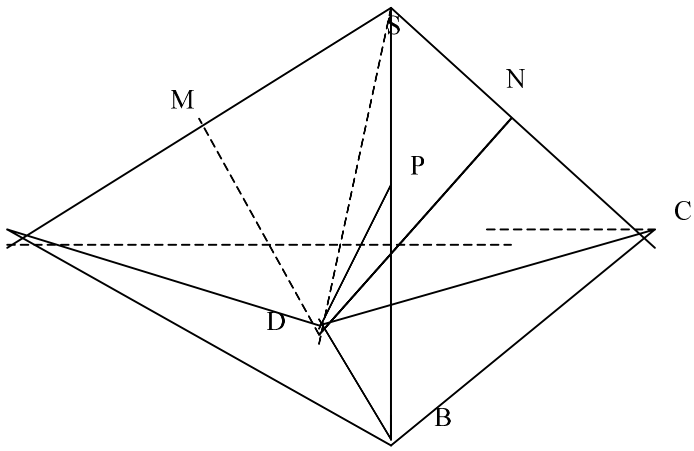
Fie acum O_1 piciorul perpendicularei din O pe SAB. Evident O_1 aparţine SL (4).

Din (3) şi (4) rezultă că în planul (SAB) cercul de centru O_1 aparţine SL (SL este înălţimea din S pe AB) intersectează laturile ΔSAB în M respectiv N. Notăm cu T intersecţia acestui cerc cu înălţimea SL. Avem <)SMN $\equiv$ <) STN (5) şi deoarece ST

este diametru <) SNT ≡ <) SLB (90 grade). Aşa că ΔSNT congruent Δ SLB şi deci <) STN ≡ <)SBL (6)
Din (5) şi (6) avem că <) SNM ≡ <)ABN deci patrulaterul AMNB este inscriptibil.
Demonstrații analoage conduc la concluzia că şi BCPN şi ACMP sunt inscriptibile.



R7.4.8 Fie SABC un tetraedru. Pe muchiile SA, SB, si SC ca diametre se construiesc trei sfere. Cele trei sfere se mai intersectează într-un punct. Care este acesta?
<u>Soluție</u>: Arătăm că piciorul înalțimii din S pe (ABC) este un punct comun al sferelor construite.
ΔSDA , ΔSDB,ΔSDC sunt dreptunghice în D şi DM = MS = MA;
DN = SN = NC, DP = PS = PB. Mediane în triunghiuri dreptunghice.



Bibliografie

1. *"Şi tu poti învăţa geometria"*-Ioan Dăucilă Editura TEORA,Buc.1993
2. *Manual pentru clasa a X-a*-Augustin Coţa+Colecturi E.D.P Buc.1996
3. *Manual pentru clasa a X-a,M1*-Mircea Gauga,Edit. MATHPRESS Ploiesti 2000
4. *Probleme de teoria numerelor si combinatorică* -L.Panaitopol Edit.Gil.Zalău-2003
5. *Algebră.Geometrie.Olimpiade şi concursuri clasa a VIII-a,*Artur Bălăuca,Edit. TAIDA,Iasi 2002
6. *Matematica în examene şi concursuri .Formare continuă*-Dumitru Vâlcau-coordonator,Edit.OPTIL-GRAPHIC,Craiova 2002

8. Secțiuni în corpuri geometrice

REZUMAT
Tema cuprinde metoda determinării secțiunilor plane în corpurile geometrice studiate cât şi calculul unor elemente legate de secțiunea respectivă: perimetrul, aria, raportul volumelor poliedrelor delimitate în urma secțiunii.
Sunt prezentate secțiuni în prismă (cub sau paralelipiped) urmate de secțiunile în piramidă şi în corpurile rotunde studiate con, cilindru şi sferă.
Pentru fiecare secțiune realizată se cer: calculul ariei pornind de la datele corespunzătoare corpului şi raportul volumelor corpurilor obținute exemplele în acest sens fiind preponderent secțiunilor ce împart corpurile în corpuri echivalente.

8.1.Generalitați

Un gen de probleme frecvent întâlnit în geometria în spațiu este acela în care un plan taie un poliedru dat şi se cere să se determine forma secțiunii şi caracterizări metrice ale acesteia cum ar fi: aria, raportul în care împarte volumul poliedrului. Acest tip de probleme dezvoltă abilități de „vedere" în spațiu şi o viziune tehnică a desenului. În general o problemă de secțiune presupune două activități independente:

(i) Construcția secțiunii
(ii) Calculul unor elemente legate de secțiune

A construi secțiunea unui poliedru P printr-un plan α revine la a determina punctele de intersecție ale planului de secțiune cu muchiile poliedrului şi a uni apoi aceste puncte prin segmente incluse în fețe.

Planul de secțiune poate fi definit prin condiții diferite. Vom aborda probleme de secțiune relative la principalele corpuri geometrice insistând asupra secțiunilor în prismă (în special în cub) şi în piramida, din cauza complexității lor.

Dacă ne referim la secțiuni paralele trebuie amintit un rezultat fundamental în justificarea poliedrelor echivalente , un puternic instrument de calcul al volumelor.
Principiul lui Cavalieri
Fie P_1 şi P_2 doua poliedre şi α_0 un plan dat. Dacă pentru orice plan α ll α_0 mulțimile (secțiunile) α intersectat P_1 , α intersectat P_2 sunt echivalente atunci poliedrele P_1 si P_2 sunt echivalente.

<u>Aplicație:</u> Cunoscând volumul cubului arătați că dacă P = ABCDA'B'C'D' este paralelipiped dreptunghic de dimensiuni AA' =a, AB = b, BC = $\frac{a^2}{b}$, atunci P are volumul a^3

8.1.1. Secțiuni în piramidă

R8.1.1.1 Se consideră piramida patrulateră VABCD cu lungimea muchiilor a. Pe muchiile [AB] şi [BC] ale bazei şi pe înălțimea [VO] se iau respectiv punctele M, N, şi O' astfel ca:

$$\frac{BM}{MA}=\frac{BN}{NC}=\frac{VO'}{OO'}=\frac{1}{3};$$

Să se determine: a) m<[(ABC);(MNO')]

b) m<[(VD);(MNO')];

c) Aria secțiunii in piramidă prin planul (MNO').

Concursul"Gr. Moisil"-Baia-Mare 1999

R.Marinescu şi I.Marinescu.

Soluție:

a) $(ABC)\cap(MNO')=MN;$

In Δ ABC, MN$\|$AC (din R.T.Thales). Deci BD$\perp$MN.Fie BD$\cap MN=\{P\}$;

Apoi, O'O $\perp$(ABC)

OP$\perp$MN $\Rightarrow$ O'P$\perp$MN

OP, MN$\subset$(ABC)

Deci m<[(ABC);(MNO')]=m(<O'PO);

In ΔOVB avem: $\frac{VO'}{O'O}=\frac{BP}{PO}=\frac{1}{3};$

Din R.T.Thales avem că O'P$\|$VB. Aşadar m<(O'PO) =m<(VBO) (alt int)

Deci m(<[ABC],(MNO')]=45 grade;

b) Se costată cu uşurința că VD=O'P. Cunoscand că O'P$\|$VB$\perp$VD, obținem m<[VD;(MNO')]=90 grade;

c) Construcția secțiunii: Intersctia planului (MNO') cu (VAC) va fi o dreaptă paralelă cu AC deci cu MN.Ducem $M_1N_1\|MN$. $M_1\in(VA)$, iar $N_1\in(VC)$. Astfel, obținem intersecțiile MM_1 şi NN_1, cu fețele (VAB) şi (VBC). Unind pe M_1 cu Q si pe N_1 cu Q, obținem intersecția planului (MNO') cu (VAD), respectiv cu (VDC). Aşadar, secțiunea realizată in piramidă este pentagonul MNN_1QM_1.

Determinarea ariei secțiunii:

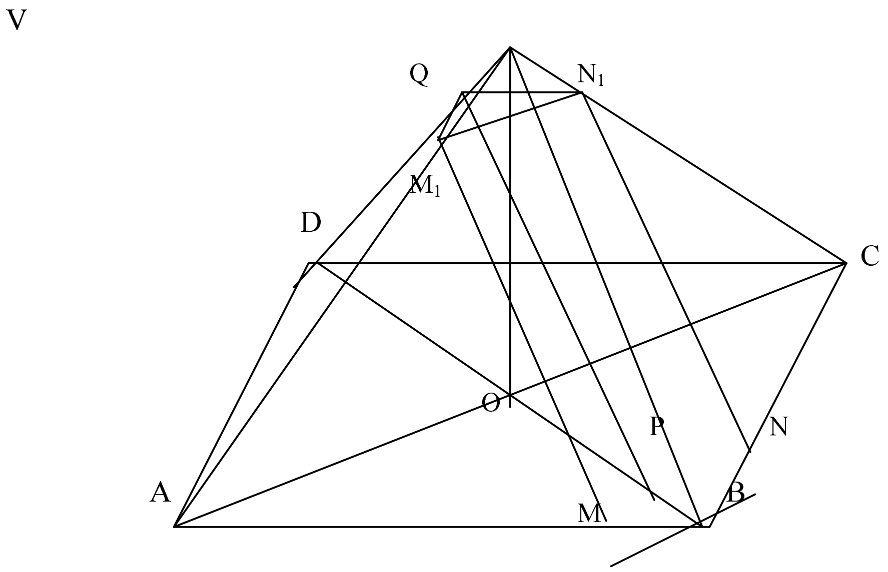
Folosind T.F.A:în ΔABC obținem MN=$\frac{a\sqrt{2}}{4}$;

în ΔABV obținem MM_1=$\frac{3a}{4}$;

în ΔVBD obținem PQ=$\frac{7a}{8}$;

$\Rightarrow$ Aria[MM_1QN_1N]=Aria[MNN_1M_1] + Aria[M_1N_1Q] =

$$MN\left(\mathbf{M}M_1+\frac{1}{2}\cdot\mathbf{O'Q}\cdot\mathbf{M}_1N1=\frac{3a^2\sqrt{2}}{16}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathbf{a}}{8}\cdot\frac{3\mathbf{a}}{4}=\frac{3\mathbf{a}^2\sqrt{2}}{16}+\frac{3\mathbf{a}^2}{64}=\frac{3\mathbf{a}^2(4\sqrt{2}+1)}{64}\right);$$



R8.1.1.2 Fie ABCD un tetraedru regulat cu muchia a, inălțimea h, distanța dintre două muchii d (neconsecutive).

a) Să se afle aria secțiunii tetraedrului cu planul determinat de înălțime şi o muchie consecutiva cu aceasta.

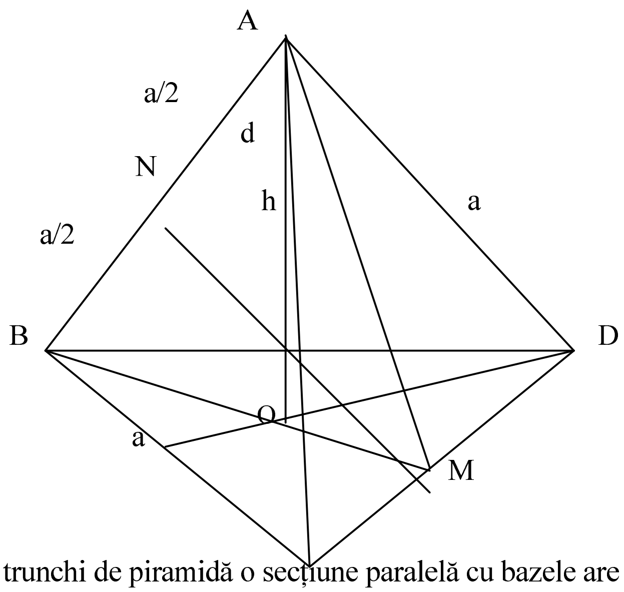
b) Să se arate că 3h=2d$\sqrt{3}$.

Soluție:

a) In Δ BCD echilateral cu latura a, înălțimea este $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ şi aria $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.Aria secțiunii este aria unui Δ isoscel cu lungimile laturilor $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ şi a, adică $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

b) Înălțimea tetraedrului este h=$\frac{a\sqrt{6}}{3}$, iar distanta dintre doua muchii opuse (neconsecutive) este de d=$\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

Avem deci: $3 \cdot h = 3 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = a\sqrt{6} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3} \cdot d$;



R8.1.1.3 Dacă într-un trunchi de piramidă o secțiune paralelă cu bazele are valoarea $S=\frac{\sqrt[3]{(S_1^{\,3}+S_2^{\,3})}^{\,2}}{4}$, atunci această secțiune împarte trunchiul in două părți echivalente (S_1, S_2- ariile bazelor).

Soluție: Dacă notăm cu h_1 şi h_2 înălțimile celor două trunchiuri de piramidă, rezultate in urma secționării,volumele lor sunt date de relațiile:

$$v_1=\frac{h_1}{3}(S+S_1+\sqrt{S_1\cdot S})=\frac{h_1}{3}\cdot\frac{\sqrt{S^3}-\sqrt{S_1}^{\,3}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}$$ -pentru partea superioară-

$$v_2=\frac{h_2}{3}(S+S_2+\sqrt{S_2\cdot S})=\frac{h_2}{3}\cdot\frac{\sqrt{S_2}^{\,3}-\sqrt{S^3}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S}}$$ -pentru partea inferioară-

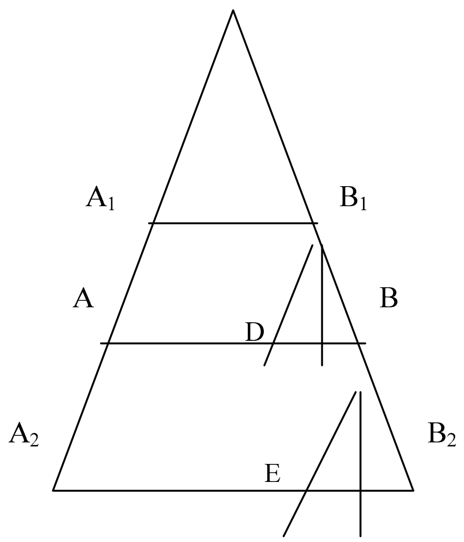
Fie $A_2B_2A_1B_1$ o secțiune ce trece prin înălțimea piramidei din care sunt obținute trunchiurile, iar A şi B punctele in care planul de secțiune intersectează planul (A_1B_2 B_1).

Notăm cu D şi E intersecția paralelei prin B_1 la A_1A_2 cu AB şi a paralelei prin B la A_1A_2 cu A_2B_2. Obținem: $\frac{A_1B_1}{AB}=\sqrt{\frac{S_1}{S}}$ şi $\frac{AB}{A_2B_2}=\sqrt{\frac{S}{S_2}}$, avem $\frac{h_1}{h_2}=\frac{DB}{EB_2}=\frac{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S}}$.

Deci, făcând raportul $\frac{v_1}{v_2}$ obținem: $\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sqrt{S^3}-\sqrt{S_1}^{\,3}}{\sqrt{S_2}^{\,3}-\sqrt{S^3}}$(1)

Cunoscând din ipoteză că $\sqrt[3]{S} = \dfrac{\sqrt{S_1^{\,3}} + \sqrt{S_2^{\,3}}}{2}$ înlocuim în (1) şi obţinem :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\dfrac{\sqrt{S_1^{\,3}} + \sqrt{S_2^{\,3}}}{2} - \dfrac{2\sqrt{S_1^{\,3}}}{2}}{\dfrac{2\sqrt{S_2^{\,3}}}{2} - \dfrac{\sqrt{S_1^{\,3}} + \sqrt{S_2^{\,3}}}{2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{S_2^{\,3}} - \sqrt{S_1^{\,3}}}{2}}{\dfrac{\sqrt{S_2^{\,3}} - \sqrt{S_1^{\,3}}}{2}} = 1;$$



R8.1.1.4 Dacă VABCD este o piramida patrulateră regulata şi E, F,G sunt mijloacele muchiilor AB,BC şi respectiv VD atunci planul (EFG) împarte piramida in două corpuri echivalente.

Soluţie:
Notăm cu:
{Q}=EF $\cap$ DC
{P}=EF $\cap$ AD
{H}=PG $\cap$ VA
{I}=QG $\cap$ VC
{J}=EF $\cap$ DB
Poligonul secţiunii este EFIGH. Elementar, obţinem: AH=VA/4; BJ=DB/4; GD=VD/2; BF=AB/2;

Avem: $v\dfrac{v(HAEJD)}{v(VABD)}=\dfrac{Aria[AEJD]\cdot d(H;(ABD))/3}{Aria[ABD]\cdot d(V;(ABD))/3}=\dfrac{7}{32}$, pentru că $\dfrac{Aria[AEJD]}{Aria[ABD]}=1-\dfrac{Aria[EJB]}{Aria[[ABD]}=1-\dfrac{EB\cdot BJ}{AB\cdot BD}=\dfrac{7}{8}$ şi $\dfrac{d(H,(ABD))}{d(V,(ABD))}=\dfrac{AH}{VA}=\dfrac{1}{4}$.

Apoi, $\dfrac{v(HJDG)}{v(VABD)}=\dfrac{Aria(DGJ)\cdot d(H,(VDB))/3}{Aria(VDB)\cdot d(A,(VDB))/3}=\dfrac{9}{32}$ deoarece $\dfrac{Aria(DGJ)}{Aria(VDB)}=\dfrac{DG\cdot DJ}{DV\cdot DB}=\dfrac{3}{8}, iar\ \dfrac{d(H,(VBD))}{d(A,(VDB))}=\dfrac{VH}{VA}=\dfrac{3}{4}$.

Cum v(HAEJD)+v(HJDG)=v(AEJDGH)$\Rightarrow \dfrac{v(AEJDGH)}{v(VABD)}=\dfrac{1}{2}$;

Observaţie: Dată fiind simetria construcţiei faţa de planul (BVD) putem calcula v(AEJGDH) şi să-l comparăm cu v(VABD)

8.1.2. Secţiuni în cub

R8.1.2.1 Să se construiască secţiunea prin cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ de muchie a, printr-un plan care trece prin mijloacele muchiilor [AB],[BC] şi [CC1]. Să se determine aria secţiunii.

R8.1.2.2 Se consideră cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ unde $[AA_1]$,$[BB_1]$,$[CC_1]$, $[DD_1]$ sunt muchiile laterale. Se consideră planul de secţiune care trece prin A, mijlocul muchiei [BC] şi centrul feţei DCC_1D_1. Să se determine raportul în care planul de secţiune împarte volumul cubului.

R8.1.2.3 Un cub de muchie a este intersectat de un plan ce conţine o diagonală a cubului. Aria secţiunii, minimă posibil determinate în cub este$5a^2/4$?

R8.1.2.4 Fie $[ABCDA^1B^1C^1D^1]$ un cub cu muchia de lungime a, M şi P mijloacele muchiilor [BC] şi $[AA^1]$ şi O^1 centrul bazei [A1B1C1D1]. Să se determine secţiunea realizată în cub de planul (HPO1), perimetrul şi aria ei.

(Admitere Univ. de Arhitectură şi Urbanism "Ion Micu")

R8.1.2.1 Soluţie (secţiuni în cub)

Determinarea secţiunii:

Planul de secţiune α=(MNP) şi planul care conţine faţa ABCD au în comun două puncte (M şi N) deci au în comun toată dreapta MN. Această dreaptă intersectează
dreptele DC şi AD în K şi L.

Planul de secţiune α şi celcare conţine faţaCDD_1C_1 au în comun punctele K şi P, deci dreapta KP este comună celor două plane.

În planul pătratului CDD_1C_1 dreapta KP intersectează dreptele C_1D_1 şi DD_1 în Q şi respective R. Planul α şi planul care conţine faţa ADD_1A_1 au în comun punctele R şi L, deci dreapta LR. Această dreaptă intersectează laturile $[AA_1]$ şi $[A_1D_1]$ în T şi respective S. Unim punctele în care α intersectează muchiile cubului obținand hexagonal MNPQST.

Determinarea ariei hexagonului de secțiune

$\Delta MBN \equiv \Delta NCK \equiv \Delta PCK \equiv \Delta PC_1Q \equiv \Delta QD_1R \equiv \Delta RD_1S \equiv \Delta SA_1T \equiv \Delta TAL \equiv \Delta TAM \equiv \Delta LAM$
rezultă că ΔLMT, ΔNKP, ΔRSQ sunt echilaterale de latură $\sqrt{(a/2)^2+(a/2)^2}=a\sqrt{2}/2$
$A_{MNPQST}=A_{\Delta RLK}-3*A_{\Delta TLM}=9a^2\sqrt{3}/8-3a^2\sqrt{3}/8=3a^2\sqrt{}$

Obs. Secțiunea este un hexagon regulat.

R8.1.2.2

Determinarea secțiunii:

Planul de secțiune şi planul bazei inferioare au în comun punctele A şi M (M-mijlocul muchiei [BC]), deci dreapta Am este dreapta lor de intersecție.

Această dreaptă în planul ABCD va intersecta dreapta DC în N. Din $\Delta ABM \equiv \Delta MCN \Rightarrow CN=AB=a$, a fiind lungimea muchiei cubului. Planul de secțiune şi planul care conține fața DCC_1D_1 au comun punctele N şi P (centrul bazei CC_1D_1D).

Prin urmare dreapta NP este dreapta de intersecție a celor două plane, care taie $[CC_1]$ în Q şi muchia $[DD_1]$ în R. Cum C mijlocul lui [DN], iar $CQ \| DD_1 \Rightarrow CQ=DR/2$. Unim punctele gasite A cu M, M cu Q, Q cu R şi R cu A. Secțiunea este patrulaterul AMQR, care împarte cubul în două poliedre:

$ABMQRD_1A_1B_1C_1$ de volum V_1 şi altul CMQRDA de volum V_2. Secțiunea este un trapez de baze MQ şi AR)

Determinarea raportului V_1/V_2

$V2= V_{RADN}-V_{QMNC}=1/3\cdot AD\cdot DN/2\cdot RD-1/3\cdot CM\cdot CN/2\cdot QC$
Fie $PP1 \| QC \Rightarrow$ P1 mijlocul muchiei [DC]
$PP1=a/2$; $\Delta NPP1 \approx \Delta NQC$ cu $NC/NP1=2/3=QC/PP1$
Deci $QC=2/3PP_1=2/3\cdot a/2=a/3$.În ΔNDR, [CQ] este linie mijlocie. Deci $DR=2QC=2a/3$.
Revenind la $V_2=7a^3/36$. $V_1=Vcub-V_2=a^3-7a^3/36=29a^3/36 \Rightarrow V_1/V_2=29/7$.

R8.1.2.3 Se arată că secțiunea este tot timpul un parallelogram cu diagonala de lungime $a\sqrt{3}$.

Dacă P este intersecția cu AA' atunci aria este minimă când d(P;BD') , minimă adică d(P;BD')=d(AA';BD') situație care conduce la $a\sqrt{2}/2$ pentru $A'P=a/2$.

În această situație, paralelogramul este romb cu latura $a\sqrt{5}/2$ şi arie $D'P\cdot PQ=a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{2}/2=a^2\sqrt{6}/2$.

Deci răspunsul este NU.

R8.1.2.4 Ducem (OP, care intersectează DA în S. Unim S cu M obținând intersecția N cu AB. Planul (ABCD) fiind || cu $A_1B_1C_1D_1 \Rightarrow$ intersecția lui α cu $A_1B_1C_1D_1$ este o dreaptăprin O paralelă cu MN. Secțiunea va fi deci pentagonal MNPQR cu QR||RN.
ΔACB şi transversala SM$\Rightarrow$(Th.Menelaus)$\Rightarrow$BN/NA=3$\Rightarrow$BN=3a/4;
AN=9/4;$\Rightarrow$MN=9$\sqrt{}$13/4; PN=a$\sqrt{}$5/4;PQ=a$\sqrt{}$10/6; QR=a$\sqrt{}$13/3;RM=a$\sqrt{}$10/3;
$P_{[MNPQR]}$=a$\sqrt{}$10/2+7a$\sqrt{}$13/12+a$\sqrt{}$5/4;
$A_{[MNPQR]} = A_{[PMN]} + A_{[PMR]} + A_{[PRQ]} = 5a^2\sqrt{}14/16$.

Bibliografie

1. *„ Şi tu poți învața geometrie”* **-**Ion Dănilă**,** Editura TEORA 1993, Bucureşti
2. *Manual M1;*- autor Mircea Ganga, Editura MATH PRESS Ploieşti 2000
3. *Concursul „Gr.Moisil”*- Al Blaga + Colectiv, Edit

9. Corpuri înscrise. Corpuri circumscrise

Rezumat

O categorie de probleme interesante şi diferite în acelaşi timp o constituie combinațiile de corpuri.

Tema constituie puncte de plecare pentru rezolvarea acestor tipuri de probleme? De probleme începând cu atenta poziționare a corpurilor în spațiu imprimând un desen adecvat demonstrațiilor cerute.

De multe ori este util să raționăm într-un auxiliary care conține proiecine proiecții ale elementelor puse în discuție.

În cele ce urmează vom analiza situații în care apar configurații de două corpuri.

9.1 Prismă şi sfere

Definiție: O sferă este înscrisă într-o prismă dacă ea este tangentă tuturor fețelor prismei.

Observații: - Centrul sferei este la distanță egală de fețele prismei deci pe planele bisectoare ale unghiurilor diedre.

- Înălțimea prismei este egală cu diametrul sferei.
- Pentru prisma dreaptă, proiecția ortogonală a sferei pe planul bazei prismei este un cerc înscris în baza prismei.

Proprietate: - Unui paralelipiped i se poate înscrie o sferă dacă şi numai dacă ariile fețelor sunt egale. Dem.(exercițiu)

Definiție: - O prismă este înscrisă într-o sferă dacă toate vârfurile prismei se află pe o sferă (echivalent cu a spune că sfera este circumscrisă prismei).

Observații: - Centrul sferei este la egală distanță de vârfurile prismei

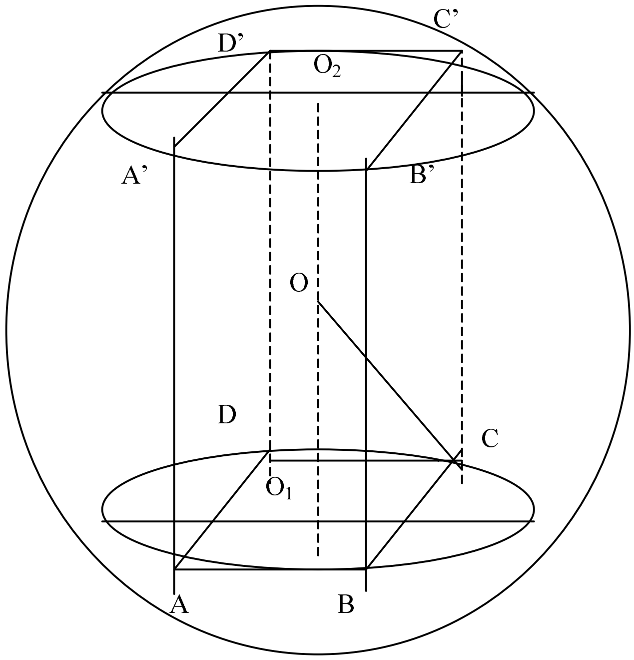
- Planele mediatoare ale oricărei muchii conțin centrul sferei.
- O prismă este inscriptibilă într-o sferă dacă şi numai dacă planele mediatoare sunt concurente.

Proprietate: - Unui paralelipiped i se poate înscrie o sferă dacă şi numai dacă e paralelipiped dreptunghic. (intersecția diagonalei este centrul sferei)

Probleme rezolvate

R9.1.1

Aplicație: - Baza unei prisme regulate este un pătrat de latură a. Dacă Înălțimea prismei este h atunci să se calculeze raza sferei circumscrise prismei.



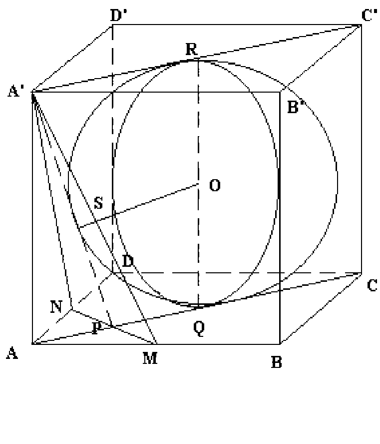
Soluție: Fie ABCDA’B’C’D’ prisma şi O_1, O_2 centrele bazelor.

Planele mediatoare ale laturilor bazelor au comună dreapta O_1O_2. Deci mijlocul lui $[O_1O_2]$ este centrul sferei circumscrise.

În planul ACC_1A_1 considerăm ΔOO_1C cu $OO_1=h/2$; $O_1C=a\sqrt{2}/2$. Deci raza OC este egală cu $R=\sqrt{(h^2+2a^2)}/2$.

Observație: În cazul particular h=a (cub) raza sferei circumscrise cubului de muchie a este $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

R9.1.2. Fie M, N mijloacele muchiilor AB, respectiv AD ale cubului ABCDA’B’C’D’. Să se arate ca sfera înscrisă in cub este tangentă la planul determinat de punctele M, N şi A’. – Concurs pentru ocuparea catedrelor vacante 1998



Soluție:

Planele (A’MN) şi (ACC’A’) sunt perpendiculare pentru că $MN \perp AC$ şi $A'A \perp MN \Rightarrow MN \perp (ACC'A')$; $MN \subset (A'MN) \Rightarrow (A'MN) \perp (ACC'A')$.

Deci piciorul perpendicularei lui O pe (A'MN) $\in$ A'P.

Calculăm OS unde S=$Pr_{A'P}$ O şi arătăm că OS= $\frac{a}{2}$.

În secţiunea ACC'A' calculăm aria trapezului A'PQR în două moduri:

$$\sigma[A'PQR]=\frac{(B+b)h}{2}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}+\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)}{2}\cdot a=\frac{3a^2\sqrt{2}}{8}.$$

$$\sigma[A'PQR]=\sigma[A'RO]+\sigma[PQO]+\sigma[A'OP]=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{2}}{2}+\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{a}{2}}{2}+\frac{OS\cdot A'P}{2}=$$

$$\frac{a^2\cdot\sqrt{2}}{8}+\frac{a^2\cdot\sqrt{2}}{16}+\frac{OS\cdot 3a\sqrt{2}}{8}.$$

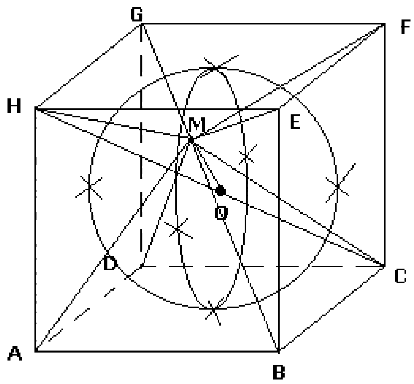
Găsim OS$\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{8}=\frac{3a^2\sqrt{2}}{8}-\frac{3\cdot a^2\sqrt{2}}{16}$ <=> OS$\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{8}=\frac{3\cdot a^2\cdot\sqrt{2}}{16}$ => OS=$\frac{a}{2}$.

Deci S$\in\rho\left(0;\frac{a}{2}\right)$.

Observaţie: Se cunoaşte o generalizare a acestei probleme pe care vă invităm să o demonstraţi:
Dacă M$\in$[AB]; N$\in$[AD] şi P$\in$[AA'] a.i. AM=α,AN=β şi AP=γ, atunci sfera înscrisă în cubul dat este tangentă planului (M,N,P) dacă şi numai dacă are loc relaţia:

$$\frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-\sqrt{\alpha^2\cdot\beta^2+\beta^2\cdot\gamma^2+\gamma^2\cdot\alpha^2}}=a. \text{ (vezi [2])}$$

R9.1.3. Se consideră cubul ABCDEFGH de latură a şi M un punct arbitrar ales pe sfera înscrisa în cub. Să se arate că $\sum MA^2=8a^2$ -(G.M. 4! 1985).



Soluție:

Se aplică Th. Medianei în ΔMHC, ΔMGB, ΔMFA, ΔMED pentru care MO este mediană. Rezultă: $MO^2 = \dfrac{2\left(MH^2 + MC^2\right) - HC^2}{4}$; $MO^2 = \dfrac{2\left(ME^2 + MB^2\right) - BG^2}{4}$; $MO^2 = \dfrac{2\left(MF^2 + MA^2\right) - AF^2}{4}$; $MO^2 = \dfrac{2\left(ME^2 + MD^2\right) - ED^2}{4}$;

$$\Rightarrow 2\sum MA^2 = 4\left(4MO^2 + d^2\right) = 4\left(4\cdot\frac{a^2}{4} + 3a^2\right) = 4\cdot 4a^2 \Rightarrow \sum MA^2 = 8a^2.$$

R9.1.4. Fie un cub ABCDA’B’C’D’. Demonstrați că există o sferă (S) care trece prin punctele A,B,C,D şi este tangentă la planul (A’B’C’D’).

–Concursul anual al rezolvatorilor –Liviu Parsan 2001

Soluție:

Vom demonstra existenta punând în evidentă centrul şi raza sferei cu proprietatea din enunț. Centrul sferei este pe perpendiculara in centrul bazei ABCD, pe planul (ABCD) pentru că daca exista atunci A,B,C,D aparțin unui cerc unic al sferei şi linia centrelor este perpendiculară pe (ABCD).

Deosebim cazurile $O \in$ Int(ABCD,A’B’C’D’] sau $O \notin$ Int.

Convine (şi deducem prin calculul distantei de la O la O_1 centrul lui ABCD) $O \in$ Int [ABCD, A’B’C’D’].

Notăm OO_1=x şi R=a-x iar OO_2=R=OC. Exprimăm OC=$\sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{2}}$ şi OO_2=a-x.

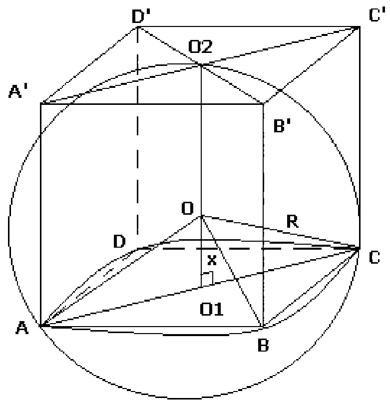
Egalând obținem: $x^2 + \dfrac{a^2}{2} = (a-x)^2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2} = (a-x)^2 - x^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2} = (a-x-x)(a-x+x) \Leftrightarrow$

$\dfrac{a^2}{2} = a(a-2x) \Rightarrow a - 2x = \dfrac{a}{2}\Big|\cdot 2 \Leftrightarrow$

$2a - 4x = a \Rightarrow x = \dfrac{a}{4}.$

Deci am pus în evidență $\rho(0;R)$ cu O la $\dfrac{a}{4}$ de O_1 şi R=$\dfrac{3a}{4}$ cu proprietatea cerută.



R9.1.5. Fie o sferă de raza 6 cm. Determinați cât la sută din
a) volumul cubului înscris în sferă reprezintă volumul sferei;
b) volumul cubului circumscris sferei reprezintă volumul sferei;
(Artur Bălăucă)

Soluție :

a) volumul cubului este $\frac{200\sqrt{3}}{3\pi}\% \approx 36,73\%$.

b) volumul sferei este $\frac{50\pi}{3}\% \approx 52,3\%$.

9.2. Prismă şi cilindru

Definiție: Un cilindru drept este înscris într-o prismă dacă suprafața laterală a sa este tangentă fețelor laterale ale prismei, iar bazele cilindrului sunt cercuri înscrise în bazele prismei.

Observație :

1) Dacă un cilindru circular drept este înscris într-o prismă atunci prisma este dreaptă
2) Liniile de-a lungul cărora suprafața laterală a cilindrului este tangentă fețelor laterale ale prismei sunt segmente perpendiculare pe bazele prismei.

Definiție : O prismă este înscrisa într-un cilindru circular drept dacă bazele sunt poligoane înscrise în cercurile bazelor cilindrului.

Observație :

Înălțimea cilindrului coincide cu înălțimea prismei.

Probleme rezolvate

R9.2.1. Muchia unui cub este a. Să se determine volumul unui cilindru circular drept înscris în cub astfel încât diagonala cubului să fie axa cilindrului, iar cercurile bazelor sunt tangente acelor diagonale ale fețelor cubului care nu au puncte în comun cu diagonala considerată ca axă.

Soluție :

În figură am luat diagonala $[BD_1]$ a cubului ca axa de rotație pentru cilindru. Bazele cilindrului vor fi tangente diagonalelor fețelor laterale $[AB_1]$, $[AC]$, $[B_1C]$ şi respectiv $[A_1C_1]$, $[DC_1]$, $[DA_1]$. Cercurile de baza ale cilindrului sunt înscrise în triunghiurile ΔAB_1C, ΔA_1DC_1. Fie O_1, O_2 centrele acestor cercuri. Mai întâi observăm că din $AC \| A_1C_1$, $AB_1 \| DC_1$ şi (AC, AB_1), (A_1C_1, DC_1) fiind perechi de drepte concurente se deduce paralelismul planelor (AB_1C), (A_1DC_1). Pe de altă parte $[BB1] \equiv [BC] \equiv [BA]$ => proiecția lui B pe planul ACB_1 coincide cu centrul cercului circumscris. Cum ΔACB_1 echilateral de latură $a\sqrt{2}$ se deduce că centrele cercurilor înscris şi circumscris în ΔACB_1 coincid. Deci $pr_{(ACB1)}B=O_1$. Analog $pr_{(A1DC1)}D=O_2$. Calculăm înălţimea cilindrului şi raza sa.

$h = a\sqrt{3}$ (diagonala cubului) $-BO_1-D_1O_2$. În piramida triunghiulară regulată BAB_1C avem $BO_1=\sqrt{AB^2 - AO_1^2}$ unde AB=a, $AO_1=\frac{2}{3}$ ma $= \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, ma- mediana Δ echilateral de latură a. Raza este raza cercului înscris în ΔAB_1C echilateral de latură $a\sqrt{2}$. $R=\frac{S}{p} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Deci volumul este

$$V=\pi r^2 h = \pi \cdot \frac{a^2}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \pi \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{18}.$$

R9.2.2. Un cilindru echilateral este înscris într-o prismă patrulateră regulată. Este prisma un cub? Calculaţi At şi V pentru cilindru dacă R=9.

Soluţie :

Răspunsul este evident afirmativ, cilindrul echilateral fiind cilindrul circular drept cu secţiunea axială pătrat.

Avand G=2r=10 rezulta At=150π şi V=500π.

R9.2.3. O prismă regulată este înscrisa într-un cilindru şi un cilindru se înscrie în această prismă. Determinati raportul volumelor acestor cilindrii în cazurile în care prisma este :

1) triunghiulară;
2) patrulateră;
3) hexagonală;

Soluţie:

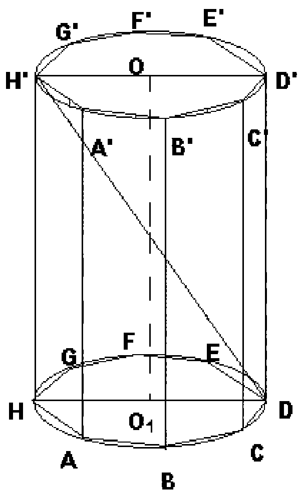
Dacă r, R notează razele cercurilor înscrise respectiv circumscrise bazei vom avea $\frac{v_c}{V_c} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{\pi R^2 \cdot h} = \left(\frac{r^r}{R}\right) = k$

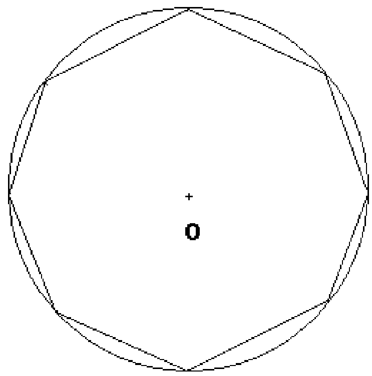
1) $k = \left(\frac{r^2}{R}\right) = \left(\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}\right) = \frac{3}{4};$

2) $k = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2};$

3) $k=\left(\frac{r}{R}\right)^2=\left(\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}\right)^2=\frac{3}{4}$;

R9.2.4. Diagonala secţiunii axiale a unui cilindru echilateral este a. Aflaţi volumul prismei octogonale regulate înscrise în cilindru.





Soluţie :

Găsim R=$\frac{a\sqrt{2}}{4}$ şi h=$\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Aria bazei prismei este Ao=$8\cdot R^2\cdot\sin\frac{360^\circ}{8}\cdot\frac{1}{2}=$ $4\cdot\frac{a^2\cdot 2}{4^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. Deci volumul este V=$\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a^2\sqrt{2}}{4}=\frac{a^3\cdot 2}{2\cdot 4}=\frac{a^3}{4}$.

Observaţie : Invităm cititorii să calculeze volumul prismei regulate cu baza un poligon regulat cu n laturi, înscrise în cilindru.

9.3. Piramida şi sfera

Definiţie: O sferă se numeşte înscrisa într-o piramidă dacă este tangentă tuturor feţelor piramidei.

Observaţie:

1) Dacă I este centrul sferei înscrise atunci este echidistant fată de feţele piramidei ;
2) Orice muchie a bazei este perpendiculară pe planul determinat de centrul sferei înscrise şi proiecţiile acestuia pe feţele adiacentei muchiei.

3) I este intersecția planelor bisectoare ale unghiurilor diedre ale piramidei şi reciproc.

<u>Propoziții</u> :

1) O sferă poate fi înscrisa într-o piramidă triunghiulară.
2) O sferă poate fi înscrisa într-o piramidă regulată.

<u>Definiție</u> : O sferă se numeşte circumscrisă unei piramide dacă toate vârfurile piramidei se află pe sferă.

Observație :

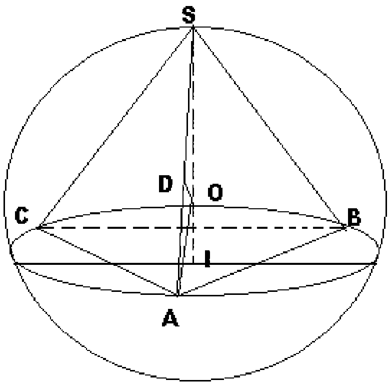
1) Vârfurile piramidei se află la aceeaşi distantă de centrul sferei.
2) Centrul sferei circumscrise este punctul de intersecție al planelor mediatoare ale muchiilor şi bazelor.
3) Proiecția centrului sferei pe fiecare fată este centrul cercului circumscris feței.

Recomandări :

- Este indicat să precizăm prin construcție centrul sferei
- Adesea este convenabil să construim o secțiune auxiliară care să împartă combinația sferă-piramidă în două părți simetrice ridicând problema la una de geometrie plană.

Probleme rezolvate

R9.3.1. O piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală de lungime l şi este înscrisa într-o sferă de rază R. Să se calculeze volumul piramidei.



Soluție :

Fie SABC piramida regulată înscrisa în sfera de centru O şi D mijlocul muchiei [SA]. Atunci OD=$\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$. $\Delta SOD<\Delta SAI$ unde I=$pr_{(ABC)}$O centrul cercului circumscris ΔABC. Deducem $\frac{SD}{SI}=\frac{SO}{SA}$ rezultand că $\frac{l}{2\cdot SI}=\frac{R}{l}$ deci SI=$\frac{l^2}{2R}$. În ΔSAI

dreptunghic în I avem AI=$\sqrt{SA^2-SI^2}=\sqrt{l^2-\frac{l^2}{4R^2}}=\frac{l}{R}\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$. Deoarece AI

raza cercului circumscris bazei $A_{[ABC]}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{l^2}{R^2}\cdot\left(R^2-\frac{l^2}{4}\right)$ şi volumul

v=$\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{l^4}{R^3}\left(R^2-\frac{l^2}{4}\right)$.

9.4. Trunchi de piramidă şi sferă

Definiţie: O sferă se numeşte înscrisa într-un trunchi de piramidă dacă ea este tangentă bazelor şi feţelor laterale ale trunchiului de piramidă.

Observaţie :

1) Diametrul sferei este egal cu înălţimea trunchiului
2) Centrul sferei înscrise este la intersecţia planelor bisectoare ale unghiurilor diedre ale trunchiului de piarmidă
3) Raza sferei se calculează unind centrul cu vârfurile trunchiului împărţind trunchiul în piramide de înaltime raza sferei . V=$r\cdot\frac{S}{3}$ cu S-aria totală a trunchiului.

Definiţie: O sferă se numeşte circumscrisă unui trunchi de piramidă dacă vârfurile trunchiului se află pe suprafaţa sferei.

Observaţie:

1) Centrul sferei se află la intersecţia planelor mediatoare ale muchiilor.
2) Proiectia centrului sferei circumscrise pe feţele trunchiului coincide cu centrele cercurilor circumscrise acelor feţe.

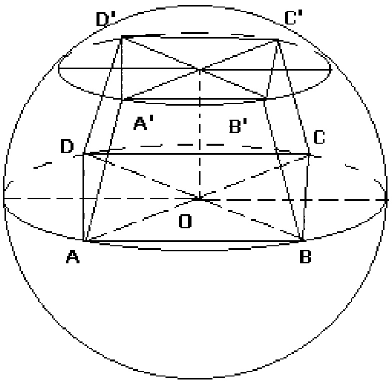
Probleme rezolvate

R9.4.1. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată este înscris într-o sferă de rază R aşa încât baza mare a trunchiului de piramidă este înscrisa într-un cerc mare al sferei. Latura bazei mici reprezintă jumătate din latura bazei mari. Aflaţi volumul trunchiului de piramidă.

Soluţie :

Fie ABCDA'B'C'D' tetraedul dat. Volumul V=$\frac{h}{3}\left(S+S'+\sqrt{SS'}\right)$ cu S aria bazei mari şi S' aria bazei mici. Avem $\frac{S}{S'}=\frac{(A'B')^2}{AB^2}=\frac{1}{4}$. Deci S'=$\frac{S}{4}$. Rezulta V=$\frac{7hS}{12}$. Dar

$S=AB^2=2R^2$. Pentru a găsi OO'=h lucrăm în $\Delta OO'A'$ dreptunghic. Deci OO'= $\sqrt{(OA')^2-(A'O')^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}}=\frac{R\sqrt{3}}{4}$. Finalizand V=$\frac{7R^2\cdot\sqrt{3}\cdot 2R}{12\cdot 2}=\frac{7R^3\sqrt{3}}{12}$.



9.5. Cilindru şi sferă

Definiţie: O sferă se numeşte înscrisa într-un cilindru drept dacă sfera este tangentă suprafeţei laterale a cilindrului de-a lungul unui cerc mare al sferei situat într-un plan paralel cu bazele.

Observaţie:

1) Centrul sferei este pe axa de rotatie a cilindrului;
2) Diametrul bazei cilindrului este egal cu diametrul sferei şi este egal cu înălţimea cilindrului;

Definiţie: Un cilindru circular drept se spune că este înscris într-o sferă dacă cercurile bazei sunt cercuri mici ale sferei.

Observaţie:

Centrul sferei coincide cu mijlocul axei cilindrului.

Definiţie: Un cilindru se numeste echilateral sau echilater dacă secţiunea axială a cilindrului este pătrat.

Recomandări:

Este util în rezolvarea problemelor să considerăm o secţiune auxiliară care imparte configuratia în doua parti simetrice, de regulă să contină axa de rotatie. De exemplu ar putea fi secţiunea axială.

Probleme rezolvate

R9.5.1. Să se înscrie în sfera de raza R un cilindru de volum maxim.

Soluţie:

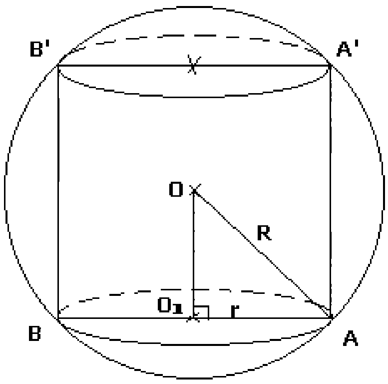
Notăm cu r -raza cercului, baza a cilindrului, cu R –raza sferei circumscrise şi h –înaltimea cilindrului.

Avem V= π r^{2}h. Considerăm secțiunea axială ABB'A'. În ΔOO_1A dreptunghic în O_1 avem $R^2=r^2+\frac{h^2}{4}$ sau $h=2\sqrt{R^2-r^2}$. Volumul $V=2\pi r^2\cdot\sqrt{R^2-r^2}$. Maximul lui V se atinge pentru acelaşi r pentru care este atins maximul expresiei

$\frac{V^2}{16\pi^2}=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\left(R^2-r^2\right)$. Cum suma factorilor $\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}+\frac{R^2-r^2}{1}=R^2$ constantă aplicand inegalitatea echivalentă cu inegalitatea mediilor

$$\frac{r^2}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\left(R^2-r^2\right)\le\left(\frac{\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}+R^2-r^2}{3}\right)^3=\frac{R^6}{3^3}$$ (ct.) deducem că maximul se atinge pentru egalitatea factorilor $\frac{r^2}{2}=R^2-r^2$ sau $r=R\sqrt{\frac{2}{3}}$ pentru care

$V_{max}=\frac{4\pi\cdot R^3}{3\sqrt{3}}$.



R.9.5.2. Dintre toti cilindrii de acelaşi volum 2πa^3 să se determine acela care este înscris în sfera cea mai mică.

Soluție:

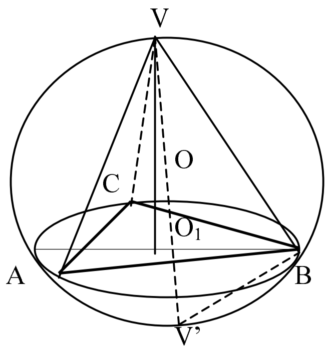
Cilindrul căutat are raza $\sqrt[6]{a^3\sqrt[3]{2}}$.

R9.3.2. Se consideră tetraedru regulat având lungimea unei muchii egală cu a a)Determinați razele sferelor circumscrisă şi înscrisă în tetraedru .

b)Să se arate că există o sferă care este tangentă tuturor muchiilor tetraedrului şi determinate de raza ei .

c)Să se calculeze ariile secțiunilor determinate în tetraedru şi în sfere de un plan paralel cu una din fețele tetraedrului , la o distanță egală cu a patra parte din înălțimea tetraedrului .

Soluție :



a)Fie VABCD tetraedru înscris în sferă cu centrul O şi O_1 centrul bazei ABC , V'=s_oV

$BO_1=\frac{2}{3}\,m_b=\frac{2}{3}\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. În ΔVBV_1 dreptunghic în B (VV_1 - diametrul sferei) aplicând teorema catetei obținem :

$VB^2=VV'\cdot VO_1$ sau $a^2=2R\,\frac{a\sqrt{3}}{6}$. De aici

$R=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Pentru a calcula raza sferei înscrise calculăm volumul tertraedrului în două moduri :

(a) $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ şi $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathbf{a}^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\mathbf{a}\sqrt{6}}{3}=\frac{\mathbf{a}^3\sqrt{2}}{12}$

(b) Descompuneți tetraedrul în patru tetraedre cu vârful în I şi baze fețele laterale , cu înălțimile din I raze ale sfere înscrise .

$V=\frac{ra^2\sqrt{3}}{3}$ şi rezolvând ecuația rezultată obținem $r=\frac{3v}{4S}=\frac{a\sqrt{6}}{12}$

b) Sfera se sprijină pe muchiile tetraedului în punctele se tangență .Segmentul care unesc cu vârf al tetraedului până la punctele de tangență sunt egale .De unde deducem că punctele de tangență coincid cu mijloacele laturile tetraedului . Cu această observație se calculează uşor raza obținând a$\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Observație :De fapt centrul sferei este punctul de concurență al bimedianelor congruente în tetraedru regulat .

c)Raportul de asemănare este $k=\frac{3}{4}$ de aici aria secțiunii în tetraedru este

$S=\frac{9}{16}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9a^2\sqrt{3}}{64}$ etc.

R103.3. Fie R şi r razele sferelor circumscrise respectiv înscrise unei piramide patrulatere regulate . Să se arate că :

Soluție : 2a fiind latura bazei si h înălțimea, R = $\frac{2a^2+h}{2h}$, r=$\frac{a}{h}(\sqrt{a^2+h^2}-a)$ calculând raportul $\frac{R}{r}$= $\frac{2+x}{2(\sqrt{1+x}-1)}$=k , unde x=$\frac{h^2}{a^2}$ obținem x^2 +4(1+k-k^2)·x+4+8k=0 cu Δ =16k^2(k^2-2k-1) , şi din condiția Δ≥0 deducem k ≥ $\sqrt{2}$ +1 .

R9.3.4.Fie O un punct pe muchia AB a tetraedului ABCD . Sfera circumscrisă tetraedului AOCD intersectează BC şi BD în M, respective N, iar sfera circumscrisă tetraedrului BOCD intersectează AC si AD în P respectiv Q . Demonstrați că ΔOMN ~ ΔOQP

Indicație : Folosiți faptul că ACMO este patrulater unscriptibil .

9.6. Con şi sferă

Definiții : 1) O sferă este înscrisă într-un con circular drept dacă este tangentă bazei conului în centrul acesteia şi este tangentă suprafeței laterale a conului de-a lungul unui cerc situate intr-un plan paralel cu planul bazei conului.

2) Un con se spune înscris într-o sferă dacă vârful conului şi cercul de bază al conului se află pe sferă .

3) Un con se numeşte echilater dacă secțiunea axială a conului este un triunghi echilateral .

Probleme rezolvate

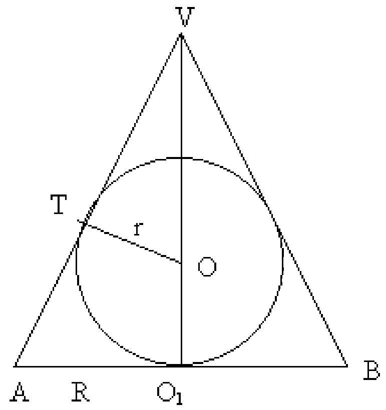
R9.6.1.Să se circumscrie sferei de rază r conul de volum minim.

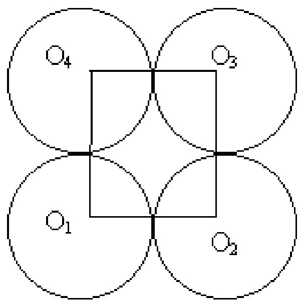
Soluție : V=$\pi r^2 h/2$ .Exprimată r şi h în funcție de r. Considerând o secțiune axială în con obținem un cerc de rază r înscris în ΔVAB isoscel .Folosind asemănarea ΔVOT ~ ΔVO_1A avem R/r = $\frac{h}{\sqrt{h(h-2r)}}$

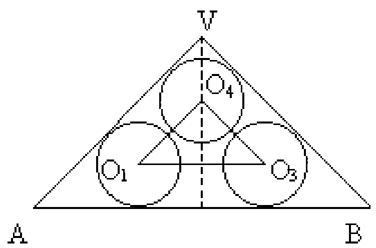
(VT^2= h(h-2r) – din puterea punctului V în raport cu cercul) De aici

R^2 =$\frac{r^2 h}{h-2r}$ rezultă V = $\frac{\pi r^2 h^2}{3(h-2r)}$

V este minim , atunci raportul $\frac{r^2h^2}{h-2r}$ este minim atunci când raportul $\frac{h-2r}{h^2}=\frac{1}{2r}\cdot\frac{2r}{h}\cdot(1-\frac{2r}{h})$ .Produsul $\frac{2r}{h}\cdot(1-\frac{2r}{h})$ este maxim când $\frac{2r}{h}=1-\frac{2r}{h}$ sau h=4·r Aşadar volumul minim dacă h = 4r , R =r$\sqrt{2}$ când V= $\frac{8\cdot\pi\cdot r^3}{3}$.







R9.6.2. Într-un con sunt aşezate cinci sfere egale . Patru din ele se află pe baza conului astfel încât oricare din aceste patru sfere este tangentă la alte două sfere de pe baza conului şi la suprafața laterală a conului . A cincea sferă este tangentă celorlalte patru sfere şi la suprafața laterală a conului .Determinați volumul conului dacă sferele au raza egală cu r.

Soluție :În secțiunile desenate $O_1O_2O_3O_4$ pătrat de latura 2r .

În ΔO_5EO_1 ,O_1O_5=2r ,O_1E=r$\sqrt{2}$ deci $O_1E/O_1O_5=\frac{1}{\sqrt{2}}$, adică m unghiul (O_5O_1E) = 45° . $\Delta VAD \approx \Delta O_1O_3E$. Deci h = R însă h=$\sqrt{2}r+\frac{2r}{\sqrt{2}}+r=r(2\sqrt{2}+1)$. Acum volumul se calculează uşor V=$\frac{\pi r^3(2\sqrt{2}+1)}{3}$.

Enunț: Să se determine aria părților, din sfera circumscrisă unui cub de muchie a, determinate de planele fețelor cubului.
Soluție: Planele fețelor cubului împart sfera în 12 unghiuri diedre şi şase patrulatere curbilinii (corespunzator celor şase fețe ale cubului). Dacă x notează aria din sferă determinată de m "unghi diedru", iar y not. aria unui patrulater curbiliniu atunci:

$$\begin{cases} 4x+y=\dfrac{\pi a^2(3-\sqrt{3})}{2} \\ 12x-6y=3\pi a^2 \end{cases}$$, de unde se obține

$x=\dfrac{\pi a^2(2-\sqrt{3})}{4}$ şi $y=\dfrac{\pi a^2(\sqrt{3}-1)}{2}$

Enunț: O sferă înscrisă într-un con care are unghiul de la varf al secțiunii axiale egal cu α. În această sferă se înscrie un con care are acelaşi unghi la varf în secțiunea axială. Să se determine sinusul unghiului α dacă raportul dintre volumul primului con şi al celui de-al doilea este egal cu a.

Soluție:

Exprimăm raza r ca raza cercului înscris în secțiunea axială a conului mic

folosind formulele $S=p\cdot r$; $S=\dfrac{abc}{4r}$; $r=\dfrac{G^2\sin\alpha}{G+r_1}$; $r=\dfrac{r_2}{\sin\alpha}$

Egalând exprimările obținem:

$\sin^2\alpha=\dfrac{r_2(G+r_1)}{G^2}$

$\sin^2\alpha=\dfrac{r_2}{G}(1+\dfrac{r_1}{G})$

$\sin^2\alpha=\dfrac{r_2}{g}*\dfrac{g}{G}(1+\dfrac{r_1}{G})$

Dar $\dfrac{r_2}{g}=\sin\dfrac{\alpha}{2};\dfrac{r_1}{G}=\sin\dfrac{\alpha}{2}$

iar $\dfrac{g}{G}=(\sqrt[3]{a})^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$. Înlocuind obținem ecuația trigonometrică

$\sin^2\alpha=\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{\mathbf{a}}}(1+\sin\dfrac{\alpha}{2})$

Folosind $\sin^2\alpha = (2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2})^2$ şi apoi formula fundamentală a trigonometriei obţinem $4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot(1-\sin\frac{\alpha}{2})(1+\sin\frac{\alpha}{2}) = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\mathbf{a}}}(1+\sin\frac{\alpha}{2}) / : (1+\sin\frac{\alpha}{2})\sin\frac{\alpha}{2}$

$4\sin\frac{\alpha}{2}(1-\sin\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ Notăm $\sin\frac{\alpha}{2} = x$ obţinem $4x-4x^2=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ echivalent cu

$(2x-1)^2=1-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ cu $x=\frac{1}{2}+-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}$

Enunţ: Două sfere de rază r şi o sferă de rază R, (R>r) se află pe un plan, tangente exterior una alteia. Să se determine raza sferei tangentă tuturor sferelor şi planului.

Soluţie: Notăm cu O_R, O_1, O_2 şi O_x centrele sferelor de raxe R, r, r, x (x este lungimea razei căutate)

Din condiţiile de tangenţa obţinem lungimiile $O_2O_R=O_1O_R=R+r$;
$O_RO_x=R+x$
$O_1O_x=O_2O_x=x+r$
Fie M, N, P proiecţiilepe planul α ale punctelor O_x, O_2 şi O_r unde O_2 este punctul de tangenţă al sferelor de rază r.
Estimăm lungimiile MN şi (a_1+a_2) şi din egalitatea lor obţinem o ecuaţie în necunoscuta x a carei soluţie pozitivă va reprezenta raza cautată
MN=$2\sqrt{\mathbf{R\cdot r}}$; $a_1 + a_2 = \sqrt{4xr - r^2} + \sqrt{4Rr - r^2}$

$$2\sqrt{Rx} - \sqrt{4xr - r^2} = \sqrt{4Rr - r^2} \quad |()^2$$

$$4Rx - 4\sqrt{Rx(4xr - r^2)} + 4xr - r^2 = 4Rr - r^2 \ |: 4$$

$$Rx + rx - Rr = \sqrt{Rx(4xr - r^2)}; x(R+r) - Rr = \sqrt{4Rrx^2 - Rr^2x}$$

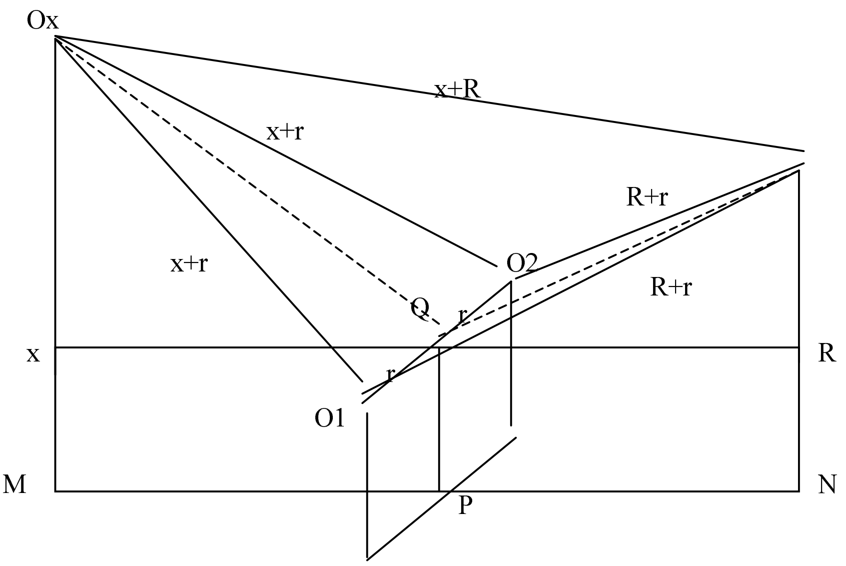
$x^2(R+r)^2-2Rr\cdot x(R+r)+R^2r^2=4Rrx^2-Rr^2x$
$x^2(R^2+2Rr+r^2-4Rr)-x\cdot Rr(2R+2r-r)+R^2r^2=0$
$x^2(R-r)2-x\cdot Rr(2R+r)+R^2r^2=0$
$\Delta=R^2r^2(2r+r)^2-4R^2r^2(R-r)^2$
$=R^2r^2[4R^2+4Rr+r^2-4R^2+8Rr-4r^2]$
$=R^2r^2[12Rr-3r^2]$
$3R^2r^2\cdot[4Rr-r^2]$

$$x_{1,2}=\frac{Rr(2R+r)+-Rr\sqrt{3(4Rr-r^2)}}{2(R-r)^2}$$

Observăm că ambele soluții sunt pozitive. Algebric deducem că există două sfere simultan tangente celor trei şi planului una în spațiul dintre sfere şi plan şi una în afara sferelor, lateral acestora.

$$R_O=\frac{Rr[2R+r+\sqrt{3(4Rr-r^2)}]}{2(R-r)^2}$$

$$R_O=\frac{Rr[2R+r-\sqrt{3(4Rr-r^2)}]}{2(R-r)^2}$$



9.7. Prismă şi con

Definiție: o prisma este înscrisă intr-un con circular drept dacă toate vârfurile bazei superioare a prismei se află pe suprafața laterală a conului; iar baza inferioară a prismei se afla pe baza conului.

Probleme rezolvate

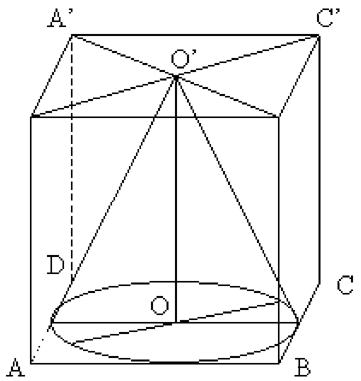
R9.7.1 Generatoarea uni con are lungimea l şi formează cu înălțimea conului unghiul α. În con se înscrie o prismă hexagonală regulată. Determinați aria prismei. Pentru ce valoare a lui α această suprafață este cea mai mare, daca l este constant ?

R9.7.2 Un con este înscris într-un cub astfel încât baza conului este înscrisă în una din fețele cubului, iar vârful conului este centrul feței opuse. Determinați raportul volumelor cubului şi conului.

Soluții : R9.7.1 Aprismă=$\dfrac{3l^2\sin^2 2\alpha}{4\sin^2(\pi/4+\alpha)}$; α=π/4

$3\cdot l^2\cdot\sin^2 2\alpha/4\sin^2(\pi/4+\alpha)$; $\alpha=\pi/4$.

R9.7.2 înălțimea conului este cât muchia cubului : Raza bazei este apotema. Deci Vcon=$\dfrac{a^3\pi}{12}$ $a^3\cdot\pi/12$. Vcub=a^3 . Vcon/Vcub=π/12.



9.8. Sferă şi trunchi de con

Definiții: 1) O sferă se numeşte înscrisă intr-un trunchi de con dacă este tangentă bazelor trunchiului în centrele lor şi suprafeței laterale a trunchiului.
2) Un trunchi de con este înscris intr-o sferă dacă cercurile bazelor trunchiului sunt cercuri pe sferă.

Probleme rezolvate

R9.8.1 Un trunchi de con este circumscris unei sfere. Ştiind că generatoarea trunchiului face cu planul bazei un unghi de măsura α, să se afle raportul volumelor trunchiului de con care se formează prin secționarea trunchiului da cu planul dus prin cercul său de tangență cu sfera.
R9.8.2. Două sfere sunt tangente exterior. Să se afle aria laterala şi volumul trunchiului de con care are ca bază cercurile de tangență cu cele două sfere ale suprafeței laterale a conului circumscris sferelor.
R9.8.3. Un trunchi de con este circumscris unei sfere de rază r şi este înscris într-o sferă de rază R. Cunoscând distanța d dintre centrele celor două sfere să se calculeze volumul trunchiului de con.

Soluții:

Enunț: Un trunchi de con este circumscris unei sfere de rază r şi este înscris într-o sfera de rază R. Cunoscând distanța d dintre centrele celor două sfere, să se calculeze volumul trunchiului de con.

Soluție: Raționând într-o secțiune axială a trunchiului observăm că:

h=2·r;

$R_1=\sqrt{R^2-(r-d)}^2$

$R_2=\sqrt{R^2-(r+d)^2}$

Înlocuind în formula volumului

$V=\frac{\pi\cdot\mathbf{h}}{3}(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)$

Obținem

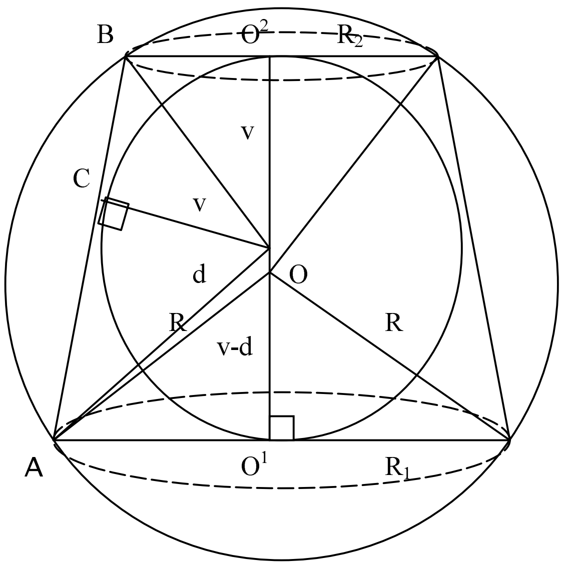
$V=\frac{\pi\cdot 2\mathbf{r}}{3}(R^2-(r-d)^2+R^2-(r+d)^2)+\sqrt{[R^2-(v-d)^2][R^2-(r+d)^2]})$

In ΔAO_1B observăm că $m(AO_1B) = 180^O - m(O^1O_1A) - m(BO_1O^2) = m(O_1BO^2) + m(O_1AO^1)= \frac{1}{2}m(ABO^2) + \frac{1}{2}m(BAO^1) = \frac{1}{2}[m(ABO^2)+ m(BAO^1)] = \frac{1}{2}\cdot 180^O = 90^O$

Dacă C este punctul de tangentă atunci $O_1C^2 = BC \cdot AC$ (Teorema înălțimii in ΔAO_1B). scrisă în termenii dați relația este $r^2=R_1\cdot R_2$

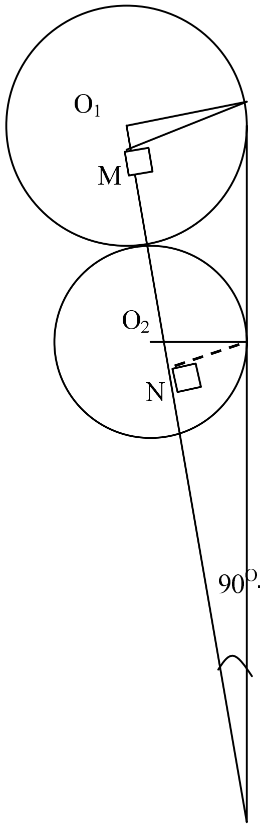
deci $V=\frac{2\pi r}{3}(R^2-(r-d)^2+R^2-(r+d)^2+\underbrace{R_1\cdot R_2}_{V^2}) = \frac{2\pi r}{3}(2R^2-2r^2-2d^2+r^2)$

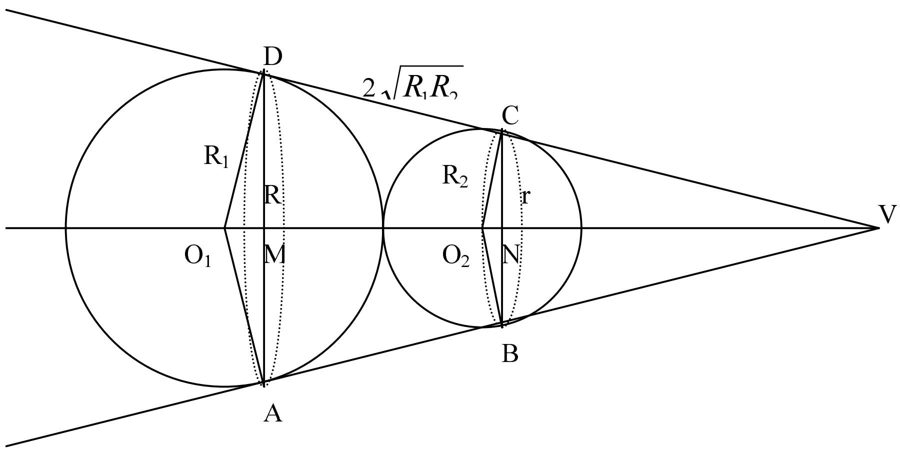
$=\frac{2\pi r}{3}(2R^2-r^2-2d^2)$



Enunț:

Două sfere de centru O1 şi O2 au razele R1 şi R2 şi sunt tangente exterior. Să se afle aria laterală şi volumul trunchiului de con, care are ca baze cercurile de tangență cu cele două sfere ale suprafeței laterale a conului circumscris sferelor.





Soluție: Găsim generatoarea trunchiului G=2$\sqrt{R_1R_2}$. În trapez Dacă notăm cu α = m(AO_1O_2) = m(CO_2V) (alterne interne) Obținem R=R_1sinα; r=R_2sinα. Însă raționând în trapezul AO_1O_2C sin α=$\frac{2\sqrt{R_1R_2}}{R_1+R_2}$ şi cos α=$\frac{R_1-R_2}{R_1+R_2}$.

Înălțimea MN = h = R_1+R_2 - cos α · (R_1 - R_2) = R_1 +R_2 - $\frac{(R_1-R_2)}{R_1+R_2}$ =

$$\frac{(R_1+R_2)^2-(R_1-R_2)^2}{R_1+R_2} = \frac{4R_1R_2}{R_1+R_2}$$

Putem calcula

$$A_l = \pi G(R + r) = \pi \cdot 2\sqrt{R_1R_2} \cdot (R_1+R_2)\sin\alpha = \pi 2\sqrt{R_1R_2} \cdot (R_1+R_2) \cdot \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{(R_1+R_2)} = 4R_1R_2 \cdot \pi$$

$$V= \frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{4R_1R_2}{R_1+R_2}[(R_1\frac{2\sqrt{R_1R_2}}{R_1+R_2})^2+(R_2\frac{2\sqrt{R_1R_2}}{R_1+R_2})^2+R_1R_2\frac{4R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}]=$$

$$=\frac{\pi h}{3}\cdot\frac{4R_1R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{4R_1^3R_2+4R_1R_2^3+4R_1^2R_2^2}{(R_1+R_2)^2}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{16R_1^2R_2^2}{(R_1+R_2)^3}(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)=$$

$$=\frac{16R_1^2R_2^2(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)}{3(R_1+R_2)^3}$$

Enunț: Un trunchi de con este circumscris unei sfere. Ştiind că generatoarea trunchiului face cu planul bazei mari un unghi de măsura α, să se afle raportul volumelor trunchiurilor de con care se formează prin secționarea trunchiului dat cu planul dus prin cercul său de tangența cu sfera.(caz particular α=60^O)

Soluție

Vom exprima atât R cât şi înălțimile celor două trunchiuri de con în funcție de r raza sferei înscrise. Lucrând într-o secțiune axială obținem:

H=2R

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = \frac{h}{\sin\alpha} \\ R_1 - R_2 = \frac{h\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{cases}$$

Rezultă R_1=r · $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ R_2 = r · $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Patrulaterul OO_1BM este inscriptibil deci m(O'Om) = α aşadar R = r · sinα apoi

h_1 = r(1 - cosα) iar h_2 = 2r – h_1 = r(1 + cosα)

$$V_1=\frac{\pi h_1}{3}(R_2^2+R^2+R_2\cdot R)=\frac{\pi r^3}{3}(1-\cos\alpha)[\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}+\sin^2\alpha+1-\cos\alpha]$$

$$V_2=\frac{\pi h_2}{3}(R_1^2+R^2+R_1\cdot R)=\frac{\pi r^3}{3}(1+\cos\alpha)[\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}+\sin^2\alpha+1+\cos\alpha]$$

Folosind formula fundamentală a trigonometriei obținem

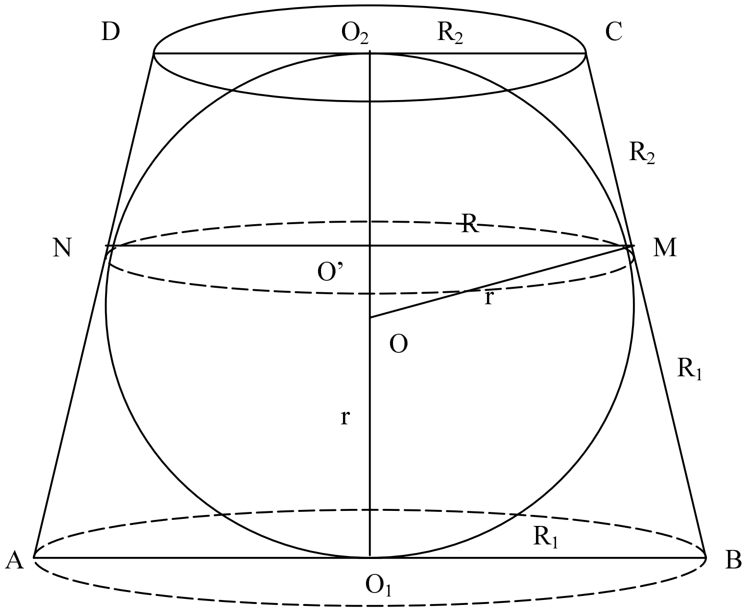
$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1+\cos\alpha}\cdot(\cos^2\alpha+3\cos\alpha+3)/\frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos\alpha}\cdot(3-\cos\alpha-\cos^2\alpha+\cos^3\alpha)=$$

$$=(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha})^3\cdot\frac{\cos^2\alpha+3\cos\alpha+3}{3-\cos\alpha-\cos^2\alpha+\cos^3\alpha}$$

Cazul particular $\alpha=60^O$ impune $R_1=r\cdot\sqrt{3}$; $R_2=r\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$

$h_1=r\cdot\frac{1}{2}$ $h_2=r\cdot\frac{3}{2}$ $R=r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{\pi\frac{r}{2}}{3}(3r^2+\frac{3}{4}r^2+r^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4})}{\frac{\pi\frac{3r}{2}}{3}(\frac{r^2}{3}+\frac{3}{4}r^2+r^2\cdot\frac{1}{2})}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(\frac{3}{1}+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4})}{(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2})}=\frac{15+\sqrt{3}}{13}$$



Enunț: Două sfere de aceeaşi rază r sunt tangente una alteia. Determinați raza sferei tangente fețelor unghiului diedru precum şi sferelor date.

Soluție: Exprimăm $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{OP - MN}{MO}$

Echivalent $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{x - r}{\sqrt{4xr + x^2}}$

Prin ridicare la pătrat scriem ecuația:

$(x-r)^2 = \sin^2\dfrac{\alpha}{2}(4xr + x^2)$

$x^2(1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}) - x \cdot r(1+2\sin^2\dfrac{\pi}{2}) + r^2 = 0$

$x^2 \cdot \cos\alpha - 2x \cdot r(2-\cos\alpha) + r^2 = 0$

$\Delta = 4r^2 \cdot (2 - \cos\alpha)2 - 4r^2\cos\alpha =$

$= 4r^2 (4 - 4\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cos\alpha) =$

$= 4r^2 (4 - 5\cos\alpha + \cos^2\alpha) =$

$= 4r^2 (\cos\alpha - 1)(\cos\alpha - 4) > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{2r(2 - \cos\alpha) + - 2r\sqrt{(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha - 4)}}{2\cos\alpha} =$

$= \dfrac{r[2 - \cos\alpha + -\sqrt{(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha - 4)}]}{\cos\alpha}$

Observație Deducem că există două sfere cu proprietatea căutată

$R_0 = \dfrac{r[2 - \cos\alpha + \sqrt{(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha - 4)}]}{\cos\alpha}$

$r_0 = \dfrac{r[2 - \cos\alpha - \sqrt{(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha - 4)}]}{\cos\alpha}$

Bibliografie

[1] Manual pentru clasa a X-a:-Edit. MATHPRESS, M.GANFA;2000

[2] "Teme alese de geometrie"- Edit. Plus Bucureşti

[3] "Olimpiade şi concursuri"- ARTUR BALAUCĂ, Edit. TAIDA,Iasi 2002

[4] Matematici pentru concursuri şcolare- T. Andreescu+Col; Edit. GIL-ZALĂU,2001.