Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A VII-A

Subiectul 1. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC cu $B > C$. Ducem înălţimea AD, $D \in BC$, şi perpendiculara DE pe AC, $E \in AC$. Considerăm punctul F pe segmentul DE. Arătaţi că dreptele AF şi BF sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $EF \cdot DC = BD \cdot DE$.

Subiectul 2. Un dreptunghi se poate împărţi, ducând paralele la laturile sale, în 200 de pătrate congruente şi în 288 de pătrate congruente. Arătaţi că dreptunghiul se poate împărţi şi în 392 de pătrate congruente.

Subiectul 3. Fie p, q şi r trei numere prime astfel încât $5 \leq p < q < r$. Ştiind că $2p^2 - r^2 \geq 49$ şi $2q^2 - r^2 \leq 193$, determinaţi p, q, r.

Subiectul 4. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu centrul O, $AB \neq BC$. Perpendiculara în O pe BD intersectează dreptele AB şi BC în punctele E, respectiv F. Fie M şi N mijloacele segmentelor CD, respectiv AD. Arătaţi că $FM \perp EN$.

Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A VII-A – SOLUŢII

Subiectul 1. În ipoteza $AF \perp BF$, observăm că patrulaterul $ABDF$ este inscriptibil, deci $\angle ABF = \angle ADF$ şi $\angle BAF = \angle DAE$. . . . . 1 punct

Rezultă $\angle BAD = \angle FAE$, de unde $\Delta ABD \sim \Delta AFE$, deci $\dfrac{BD}{FE} = \dfrac{AD}{AE}$. 1 punct

Pe de altă parte, $\Delta ADE \sim \Delta DCE$, de unde rezultă $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{CD}{DE}$. 1 punct

Atunci $\dfrac{BD}{FE} = \dfrac{CD}{DE}$, de unde $EF \cdot DC = BD \cdot DE$. . . . . 1 punct

Reciproc, din $EF \cdot DC = BD \cdot DE$ avem $\dfrac{BD}{FE} = \dfrac{CD}{DE}$ şi apoi $\Delta ADE \sim \Delta DCE$, de unde $\dfrac{CD}{DE} = \dfrac{AD}{AE}$. . . . . 1 punct

Urmează $\dfrac{BD}{FE} = \dfrac{AD}{AE}$, deci $\Delta ABD \sim \Delta AFE$, de unde $\angle AFE = \angle ABD$. 1 punct

Obţinem $ABDF$ inscriptibil, deci $\angle AFB = \angle BDA$, de unde $AF \perp BF$. 1 punct

Subiectul 2. Laturile a, b ale dreptunghiului se împart în m_1, respectiv n_1 segmente de lungime u formându-se 200 de pătrate de latură u şi în m_2, respectiv n_2 segmente de lungime v formându-se 288 de pătrate de latură v. Avem $m_1 n_1 = 200$, $m_2 n_2 = 288$. . . . . 1 punct

În plus, $\dfrac{a}{m_1} = \dfrac{b}{n_1} = u$ şi $\dfrac{a}{m_2} = \dfrac{b}{n_2} = v$. . . . . 1 punct

Avem $u^2 = \left(\frac{a}{m_1}\right)^2 = \frac{ab}{200}, v^2 = \left(\frac{a}{m_2}\right)^2 = \frac{ab}{288}$, de unde $m_1^2 = \frac{200a}{b}, m_2^2 = \frac{288a}{b}$ .... 2 puncte

Rezultă $2m_2 > m_1$ şi analog $2n_2 > n_1$. Fie $m_3 = 2m_2 - m_1$ şi $n_3 = 2n_2 - n_1$. Atunci $\frac{m_3}{a} = \frac{2m_2}{a} - \frac{m_1}{a}$, $\frac{n_3}{b} = \frac{2n_2}{b} - \frac{n_1}{b}$, deci $\frac{a}{m_3} = \frac{b}{n_3} = z$.

Avem $m_1 n_2 = \frac{a}{u} \cdot \frac{b}{v} = \frac{b}{u} \cdot \frac{a}{v} = n_1 m_2$, şi $m_1 n_1 \cdot m_2 n_2 = 200 \cdot 288 = 240^2$, deci $m_1 n_2 = m_2 n_1 = 240$. .... 1 punct

Atunci $m_3 n_3 = 4m_2 n_2 + m_1 n_1 - 2m_1 n_2 - 2m_2 n_1 = 4 \cdot 288 + 200 - 4 \cdot 240 = 392$, deci împărţind laturile dreptunghiului în m_3, respectiv n_3 segmente de lungime z, obţinem 392 pătrate de latură z. .... 2 puncte

Subiectul 3. Din enunţ rezultă $2q^2 - 193 \leq r^2 \leq 2p^2 - 49$, deci $q^2 - p^2 \leq 72$. .... 2 puncte

Pe de altă parte, din $5 \leq p < q < r$ rezultă $r \geq 11$, deci $2p^2 \geq 49 + 121 = 170$, adică $p \geq 11$. .... 1 punct

Cum $(q - p)(q + p) \leq 72$ şi $q - p = 2$ sau $q - p \geq 4$, rezultă

i) $q - p = 2$ şi $q + p \leq 36$, deci $(p, q) = (11, 13)$ sau $(17, 19)$;

ii) $q - p \geq 4$ şi $q + p \leq 18$, fără soluţii în urma condiţiei $p \geq 11$. 2 puncte

Dacă $(p, q) = (11, 13)$, atunci $145 \leq r^2 \leq 193$, de unde $r = 13 = q$, ceea ce nu convine. .... 1 punct

Dacă $(p, q) = (17, 19)$, atunci $529 \leq r^2 \leq 529$, de unde $r = 23$. În concluzie, $p = 17, q = 19, r = 23$. .... 1 punct

Subiectul 4. Fie P mijlocul laturii BC şi Q intersecţia dreptelor DC şi EF. Cum MP este linie mijlocie în triunghiul BCD avem $MP \parallel BD$, deci $FQ \perp MP$. .... 2 puncte

Din $MC \perp FP$ rezultă că Q este ortocentrul triunghiului MPF, deci $PQ \perp FM$. .... 2 puncte

Congruenţa LUL a triunghiurilor POQ şi NOE arată că $QP \parallel EN$. 2 puncte

Rezultă $FM \perp EN$, ceea ce trebuia arătat. .... 1 punct