INEGALITĂȚI ALGEBRICE

PROBLEME COMENTATE

1. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ oricare ar fi } a, b \geq 0.$$

Să se precizeze în ce caz inegalitatea dată devine egalitate.

Soluție:

Demonstrăm inegalitatea folosind echivalențele:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0,$$ ceea ce este evident, oricare ar fi $a, b \geq 0$.

Observăm că egalitatea are loc dacă şi numai dacă $(a-b)^2 = 0$, adică $a = b$.

Comentarii:

a) Inegalitatea demonstrată mai sus reprezintă inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică, iar metoda folosită în demonstrație se numeşte ***reducere*** (scrierea inegalității inițiale în forme echivalente prin efectuarea de operații simple asupra unei inegalități, până se ajunge la o formă despre care putem spune cu certitudine că este adevărată).

Aşadar am demonstrat:

$(\boldsymbol{MA-MG})_2$ $$\frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}} \geq \sqrt{\boldsymbol{ab}},$$ oricare ar fi $a, b \geq 0$.

În acelaşi mod, se pot demonstra inegalitățile:

$(\boldsymbol{MP-MA})_2$ $$\sqrt{\frac{\boldsymbol{a^2+b^2}}{\boldsymbol{2}}} \geq \frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}},$$ oricare ar fi $a, b \geq 0$ (media pătratică şi media aritmetică),

$\left(MG-MH\right)_2$ $$\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

oricare ar fi $a,b>0$ (media geometrică şi media armonică).

În fiecare dintre acestea egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b$.
Astfel, am stabilit şirul de inegalități ale mediilor:

$\left(MP\ \text{-}\ MA\ \text{-}\ MG\ \text{-}\ MH\right)_2$ $$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

oricare ar fi $a,b>0$,

unde recunoaştem media pătratică, media aritmetică, media geometrică şi media armonică.

b) Inegalitățile mediilor se pot generaliza, mai întâi pentru trei numere:

$\left(MP-MA\right)_3$ $$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq\frac{a+b+c}{3},$$

oricare ar fi $a,b,c\geq 0$,

$\left(MA-MG\right)_3$ $$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc},$$

oricare ar fi $a,b,c\geq 0$,

$\left(MG-MH\right)_3$ $$\sqrt[3]{abc}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

oricare ar fi $a,b,c>0$,

în fiecare dintre acestea, egalitatea având loc dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Să demonstrăm aceste inegalități.

Pentru $\left(MP-MA\right)_3$ folosim tot ***reducerea***:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq\frac{a+b+c}{3}\iff\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{9}\iff 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\left(a+b+c\right)^2\iff$$

$\iff 2a^2+2b^2+2c^2\geq 2ab+2bc+2ca \iff a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2\geq 0\iff$
$\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\geq 0,$ inegalitate evidentă, egalitatea având loc, evident, dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Pentru $(MA-MG)_3$ facem apel la:

identitatea

$$\mathbf{(1)}\ \ x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$$

şi inegalitatea

$$\mathbf{(2)}\ \ x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx,$$

oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Identitatea se verifică uşor prin calcul, iar inegalitatea se demonstrează astfel:
$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2zx \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0,$
ceea ce este evident. Să mai observăm că inegalitatea dată devine egalitate dacă şi numai dacă $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0,$ altfel spus $x=y=z.$

Este clar acum că $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)\geq 0,$ deci $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz,$ egalul având loc dacă şi numai dacă $x=y=z.$

Nu rămâne decât să notăm: $\begin{cases} x^3=a \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{a} \\ y^3=b \Leftrightarrow y=\sqrt[3]{b} \\ z^3=c \Leftrightarrow z=\sqrt[3]{c} \end{cases}$ şi inegalitatea $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$ se scrie

echivalent $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc},$ cu egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c;$ astfel am demonstrat inegalitatea $(MA-MG)_3$.

Pentru a demonstra inegalitatea $(MG-MH)_3$ ne folosim de inegalitatea $(MA-MG)_3$ (demonstrată mai sus).

Putem scrie: $\sqrt[3]{abc}\geq\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}$

şi recunoaştem inegalitatea $(MA-MG)_3$ aplicată numerelor $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}>0.$
Mai precizăm că şi în inegalitatea $(MG-MH)_3$ egalul se atinge dacă şi numai dacă $a=b=c.$

În concluzie, am reuşit să ordonăm mediile şi pentru trei numere:

$$\mathbf{(MP-MA-MG-MH)_3}\quad \sqrt{\frac{\mathbf{a^2+b^2+c^2}}{\mathbf{3}}}\geq\frac{\mathbf{a+b+c}}{\mathbf{3}}\geq\sqrt[3]{\mathbf{abc}}\geq\frac{\mathbf{3}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}}},$$

oricare ar fi $a,b,c>0$.

c) Se pot demonstra inegalitățile mediilor şi pentru n numere reale $a_1,a_2,...,a_n>0$:

$(MP-MA)_n$ $$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}\geq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n},$$

$(MA-MG)_n$ $$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n},$$

$(MG-MH)_n$ $$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}},$$

în fiecare inegalitate egalul având loc dacă şi numai dacă $a_1=a_2=...=a_n$.

Avem deci inegalitățile $(MP-MA-MG-MH)_n$:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}\geq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}},$$

oricare ar fi $a_1,a_2,...,a_n>0$.

2. Să rezolvăm următoarele probleme (în legătură cu problema comentată 1):

(i) Demonstrați că oricare ar fi $a,b,c>0$, au loc inegalitățile:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\geq\sqrt[3]{abc}.$$

Soluție: Pentru prima inegalitate folosim ***reducerea***:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\iff(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)\iff a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

şi am obținut inegalitatea (2).

Pentru a doua inegalitate avem, prin ridicare la pătrat:

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\geq\sqrt[3]{abc}\iff\frac{ab+bc+ca}{3}\geq\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2\iff\frac{ab+bc+ca}{3}\geq\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)},$$

inegalitate adevărată, dacă ținem cont de $(MA-MG)_3$ aplicată numerelor $ab,\ bc,\ ca$.