



FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

PATRATUL SUMEI A DOI TERMENI (BINOMUL LA PATRAT)

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Demonstratie

$$(a + b)(a + b) = aa + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a - b)(a - b) = aa - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Aplicatie

1. Sa se compare numerele $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ si $y = \sqrt{7} + 1$

Deoarece x si y sunt pozitive, putem sa comparam patratele lor:

$$x^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 3 + 2\sqrt{15} + 5 = 8 + 2\sqrt{15}$$

$$y^2 = (\sqrt{7} + 1)^2 = 7 + 2\sqrt{7} + 1 = 8 + 2\sqrt{7}$$

Deoarece $x^2 > y^2 \Rightarrow x > y$

PATRATUL SUMEI A TREI TERMENI (TRINOMUL LA PATRAT)

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

Demonstratia se face la fel ca si la binomul la patrat.

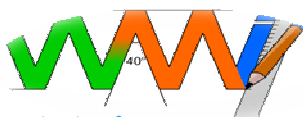
PRODUSUL SUMEI CU DIFERENTA

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Aplicatie.

Sa se demonstreze ca daca $x, y \geq 0$ atunci $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$

$$x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) \leq 0 \Leftrightarrow x - y \leq 0 \Rightarrow x \leq y$$



cu noi totul pare mai usor

CUBUL SUMEI A DOI TERMENI

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Formula se mai poate scrie si astfel:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

La fel se poate scrie:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Demonstratia se face ca la formula precedenta

DIFERENTA A DOUA CUBURI

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

SUMA A DOUA CUBURI

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Exercitii

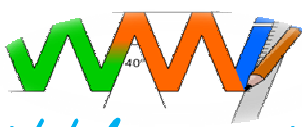
1. Sa se demonstreze ca $x^2 + 6x + y^2 + 10y + 34 \geq 0$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = (x + 3)^2 + (y + 5)^2$ Avand o suma de 2 numere pozitive expresia este mai mare decat 0.

2. Sa se afle minimul expresiei $(2x^2 + 10x + 8)$

$$2x^2 + 10x + 8 = 2(x^2 + 5x + 4) = 2\left[\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} + 4\right] = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$$

Minimul expresiei se obtine cand $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ este minima, adica 0. Rezulta ca minimul este $-\frac{9}{2}$



cu noi totul pare mai usor

3. Sa se afle maximul expresiei: $-x^2 + 32x + 1$

$-x^2 + 32x - 256 + 257 = -(x^2 - 32x + 256) + 257 = -(x - 16)^2 + 257$ Maximul se obtine pentru minimul expresiei cu semnul -, adica pentru $(x - 16)^2 = 0$. Deci maximul este 257

4. Sa se determine numerele reale x, y pentru care $3x^2 - 2\sqrt{3}x + y^2 + 6y + 10 = 0$

$$(3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 0 \Rightarrow (\sqrt{3}x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{3}x - 1) = 0; (y + 3) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ si } y = -3$$

5. Sa se arate ca numarul $\overline{a2} \cdot \overline{a4} + 1$ este un patrat perfect.

$$\overline{a2} \cdot \overline{a4} + 1 = (10a + 2)(10a + 4) + 1 = 100a^2 + 60a + 9 = (10a + 3)^2$$

6. Sa se arate ca numarul $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$ este un patrat perfect.

$$x(x + 3)(x + 1)(x + 2) + 1 = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1 \text{ Notam } x^2 + 3x \text{ cu}$$

$$k \Rightarrow k(k + 2) + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 = (x^2 + 3x + 1)^2 \text{ ceea ce trebuia sa demonstram.}$$

7. Daca $x + \frac{1}{x} = 5$ sa se calculeze:

i) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 25 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 25 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 25 - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$$

ii) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3 \left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} \Rightarrow$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 125 - 3 \cdot 5 = 125 - 15 = 110$$

8. Daca $x^2 - 3x + 4 = 10$ sa se calculeze expresia:

$$x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 24$$

$$(x^2 - 3x + 4)^2 = x^4 + 9x^2 + 16 - 6x^3 + 8x^2 - 24x = x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 16 \Rightarrow$$

$$x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 24 = (x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 16) + 8 = (x^2 - 3x + 4)^2 + 8 = 10^2 + 8 = 108$$

9. Sa se calculeze $12^3 - 8^3$

$$12^3 - 8^3 = (12 - 8)(12^2 + 12 \cdot 8 + 8^2) = 4 \cdot (144 + 96 + 64) = 4 \cdot 304 = 1216$$

