FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

PATRATUL SUMEI A DOI TERMENI (BINOMUL LA PATRAT)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Demonstratie

$(a+b)(a+b) = aa + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)(a-b) = aa - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Aplicatie

1. ***Sa se compare numerele x=*** $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ***si y=*** $\sqrt{7}+1$

Deoarece x si y sunt pozitive, putem sa comparam patratele lor:

$x^2 = (\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 = 3 + 2\sqrt{15} + 5 = 8 + 2\sqrt{15}$

$y^2 = (\sqrt{7}+1)^2 = 7 + 2\sqrt{7} + 1 = 8 + 2\sqrt{7}$

Deoarece $x^2 \succ y^2 \Rightarrow x \succ y$

PATRATUL SUMEI A TREI TERMENI (TRINOMUL LA PATRAT)

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

Demonstratia se face la fel ca si la binomul la patrat.

PRODUSUL SUMEI CU DIFERENTA

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Aplicatie.

Sa se demonstreze ca daca $x, y \geq 0$ *atunci* $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$

$x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow x - y \leq 0 \Rightarrow x \leq y$

CUBUL SUMEI A DOI TERMENI

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Formula se mai poate scrie si astfel:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

La fel se poate scrie:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Demonstratia se face ca la formula precedenta

DIFERENTA A DOUA CUBURI

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

SUMA A DOUA CUBURI

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Exercitii

1. Sa se demonstreze ca $x^2+6x+y^2+10y+34 \geq 0$

$x^2+6x+9+y^2+10y+25=(x+3)^2+(y+5)^2$ *Avand o suma de 2 numere pozitive expresia este mai mare decat 0.*

2. Sa se afle minimul expresiei $(2x^2+10x+8)$

$$2x^2+10x+8 = 2(x^2+5x+4) = 2\left[(x^2+5x+\frac{25}{4}) - \frac{25}{4} + 4\right] = 2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$$

Minimul expresiei se obtine cand $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$ *este minima, adica 0.Rezulta ca minimul este* $-\frac{9}{2}$

3.Sa se afle maximul expresiei: $-x^2+32x+1$

$-x^2+32x-256+257=-(x^2-32x+256)+257=-(x-16)^2+257$ *Maximul se obtine pentru minimul expresiei cu semnul -, adica pentru* $(x-16)^2=0$. *Deci maximul este 257*

4. Sa se determine numerele reale x, y pentru care $3x^2-2\sqrt{3}x+y^2+6y+10=0$

$(3x^2-2\sqrt{3}x+1)+(y^2+6y+9)=0 \Rightarrow (\sqrt{3}x-1)^2+(y+3)^2=0 \Rightarrow (\sqrt{3}x-1)=0;(y+3)=0$ $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ *si* $y=-3$

5. Sa se arate ca numarul $\overline{a2}\cdot\overline{a4}+1$ ***este un patrat perfect.***

$\overline{a2}\cdot\overline{a4}+1=(10a+2)(10a+4)+1=100a^2+60a+9=(10a+3)^2$

6. Sa se arate ca numarul $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ ***este un patrat perfect.***

$x(x+3)(x+1)(x+2)+1=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$ *Notam* x^2+3x *cu* $k \Rightarrow k(k+2)+1=k^2+2k+1=(k+1)^2=(x^2+3x+1)^2$ *ceea ce trebuia sa demonstram.*

7.Daca $x+\frac{1}{x}=5$ ***sa se calculeze:***

i) $x^2+\frac{1}{x^2}$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5^2 \Rightarrow x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=25 \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=2 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=25-2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=23$$

ii) $x^3+\frac{1}{x^3}$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3} \Rightarrow$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=125-3\cdot5=125-15=110$$

8.Daca $x^2-3x+4=10$ ***sa se calculeze expresia:***

$x^4-6x^3+17x^2-24x+24$

$$(x^2-3x+4)^2=x^4+9x^2+16-6x^3+8x^2-24x=x^4-6x^3+17x^2-24x+16 \Rightarrow$$

$$x^4-6x^3+17x^2-24x+24=(x^4-6x^3+17x^2-24x+16)+8=(x^2-3x+4)^2+8=10^2+8=108$$

9. Sa se calculeze 12^3-8^3

$$12^3-8^3=(12-8)(12^2+12\cdot8+8^2)=4\cdot(144+96+64)=4\cdot304=1216$$