Mulțimea numereleor naturale N

Pentru a scrie un numar oarecare trebuie sa combinam intre ele unele dintre cele 10 simboluri: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.Aceste simboluri se numesc ***cifre*.**
Ele sunt de origine araba.

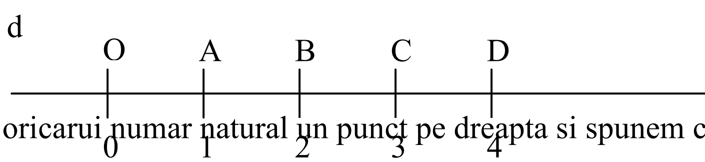
$N = \{0,1,2,3,4,5,6,......\infty\}$ - mulțimea numerelor naturale

$N^* = \{1,2,3,4,5,6,......\infty\}$ - mulțimea numerelor naturale nenule (fara 0)

- orice numar natural format din doua cifre se scrie $\overline{ab}$ unde a este cifra zecilor, iar b este cifra unitatilor;
- daca $\overline{abc}$ este un numar natural de trei cifre, atunci $\overline{cba}$ este ***rasturnatul*** sau, cu $a, c \neq 0$;
- orice numar natural care are cifra unitatilor 0, 2, 4, 6, 8 se numeste **numar** ***par*** *(numerele care se impart exact la 2 şi se notează cu n=2k)*;
- orice numar natural care are cifra unitatilor 1, 3, 5, 7, 9 se numeste **numar** ***impar*** *(numerele care nu se impart exact la 2 şi se notează cu n=2k+1)*;

REPREZENTAREA NUMERELOR NATURALE PE AXA. COMPARAREA SI ORDONAREA .

Fie d o dreapta pe care alegem un punct O caruia ii asociem numarul 0. Literei A ii asociem numarul 1, lui B numarul 2 etc.
OA=AB=BC=CD=...



Putem astfel asocia oricarui numar natural un punct pe dreapta si spunem ca am reprezentat numerele naturale pe axa numerelor.
Dreapta d se numeste *suportul axei*; punctul O se numeste *originea axei*; sensul de parcurgere a dreptei de la O spre D se numeste *sensul de crestere* a valorilor reprezentate pe axa. Lungimea unui singur segment OA se numeste *unitate de masura.* Axa numerelor se mai numeste si axa de coordonate, iar in acest caz putem spune de exemplu ca 3 reprezinta coordonata punctului C, notand C(3).
Daca se dau doua numere naturale oarecare a,b avem doar urmatoarele relatii intre ele:

1. a<b ;
2. a>b ;
3. a=b ;

Operații cu numere naturale

Adunarea Dacă a,b $\in$ N**,** atunci a+b=c $\in$ N

Proprietatile adunarii

1. *Comutativa* : a+b=b+a $(\forall) a, b \in N$
2. *Asociativa* : (a+b)+c=a+(b+c) $(\forall) a, b, c \in N$
3. *Element neutru:* a+0=a $(\forall) a \in N$ 0 este element neutru pentru operatia de adunare.

Scăderea a-b=c, dacă şi numai dacă a=b+c

Inmultirea *(Produsul)*

Inmultirea inseamna adunarea repetata a aceluiasi numar.
$15+15+15+15+15+15=15\times 6=15\bullet 6=90$

$\underbrace{15 \bullet 6}_{\text{factori}} = \underbrace{90}_{\text{produs}}$

Proprietatile inmultirii.

1.Comutativa $a\bullet b=b\bullet a \ (\forall)a,b\in N$

2.Asociativa $(a\bullet b)\bullet c=a\bullet (b\bullet c) \ (\forall)a,b,c\in N$

3.Element neutru $a\bullet 1=1\bullet a=a \ (\forall)a\in N$

4 Distributiva fata de adunare si scadere

$a\bullet (b+c)=a\bullet b+a\bullet c$

$a\bullet (b-c)=a\bullet b-a\bullet c$

$(b+c)\bullet a=b\bullet a+c\bullet a$

$(b-c)\bullet a=b\bullet a-c\bullet a$

Factor comun

$a\bullet b+a\bullet c=a\bullet (b+c)$

$a\bullet b-a\bullet c=a\bullet (b-c)$

Deoarece factorul a apare in toate produsele spunem ca a este *factor comun*.Egalitatile de mai sus exprima scoaterea factorului comun.

Observatii

1.Egalitatea si inegalitatea numerelor naturale se pastreaza daca se inmultesc ambii membrii cu acelesi numar natural, diferit de 0.

2.Inmultirea este o operatie de ordinul II, se efectueaza inaintea adunarii si scderii.

Impartirea(impartirea cu rest) **a:b = c dacă şi numai dacă a= b• c**

Teorema impartirii cu rest $d=i\bullet c+r; r<i$

- d este deimpartitul
- i este impartitorul
- c este catul
- r este restul

$28:9=3(r=1)\rightarrow 28=9\bullet 3+1$

Observatii

1. *Impartirea la 0 nu are sens.*
2. *La impartirea unui numar natural la 2 restul poate fi 0 sau 1. Daca n=2k, restul este 0, iar daca n=2k+1 restul este 1, unde k este catul.*
3. *La impartirea unui numar natural la 3, restul poate fi 0, 1, 2. Daca n=3k restul este 0, daca n=3k+1 restul este 1 si daca n=3k+2 restul este 2, iar k este catul.*
4. *Daca restul unei impartiri este 0 atunci impartirea este exacta. In acest caz avem* $d=i\bullet c$
   Daca numerele naturale a si b se impart exact la numarul natural c (c diferit de 0) atunci avem:
   $(a+b):c=a:c+b:c$
5. *Impartirea ca si inmultirea este o operatie de ordinul II.*
6. *Intr- un exercitiu fara paranteze se efectueaza intai operatiile de ordinul II.*
7. *Daca intr-un exercitiu avem numai operatii de ordinul II si nu avem paranteze, atunci operatiile se efectueaza in ordinea in care sunt scrise.*

8. *Egalitatea si inegalitatea numerelor naturale se pastreaza daca se impart exact mambrii acestora cu acelasi numar natural diferit de 0.*

Ridicarea la putere(exponent numar natural)

Ridicarea la putere este o inmultire repetata.

Exemplu: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$; 3 se numeste *baza* iar 6 este *exponent*.
Daca avem in general baza a si exponentul n, puterea a n-a a numarului a este produsul a n factori egali cu numarul a.

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a = a^n$ cu a si n numere naturale

Observatii

1. $a^1 = a$
2. $a^0 = 1 \forall a \in N^*$
3. $0^n = 0$
4. $1^n = 1$

5.Exponentul arata de cate ori se repeta baza in produsul prin care se calculeaza puterea.
6.Ridicarea la putere este o operatie de ordinul al treilea, adica in lipsa parantezelor, se efectueaza inaintea celorlalte operatii.
7. Puterea a 2-a a unui numar natural de m cifre are 2m-1 cifre sau 2m cifre.
8. Orice putere a unui numar natural care are ultima cifra 0, 1, 5 sau 6 va avea ultima cifra tot 0, 1, 5, 6. Vom scrie de exemplu $u(46^6) = 6$ *.Prin u(n) se intelege ultima cifra a numarului n*
9.. Orice putere a unui numar care are ultima cifra 4, are ultima cifra 6 daca exponentul este par si 4 daca exponentul este impar

Reguli de calcul cu puteri.

i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

ii) $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

iii) $a^m : a^n = a^{m-n}$ cu m>n

iv) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

DIVIZIBILITATE

Prin inmultirea unui numar a, diferit de 0 cu un numar natural n spunem ca am obtinut un multiplu a lui a.

$N = a \cdot n \Rightarrow N$ multiplu a lui a

In acest caz vom spune ca N este divizibil cu a si notam $N \vdots a$ sau $a | N$.

*Un numar natural a este divizibil cu un numar natural b daca exista un numar natural c astfel incat **a=bc**.*

Notam multimea divizorilor unui numar n cu D_n, iar multimea multiplilor cu M_n.

Proprietati ale relatiei de divizibilitate.

1.Orice numar natural se divide cu 1; $n \vdots 1$ deoarece $n = 1 \cdot n$

2. Orice numar natural se divide cu el insusi; $n \vdots n$ deoarece $n = n \cdot 1$

3. Numarul 0 se divide cu orice numar natural n; $0 \vdots n$ deoarece $0 = n \cdot 0$. Zero este multiplul oricarui numar natural.

4. Proprietatea de tranzitivitate.
Daca a se divide cu b, atunci a se divide cu orice divizor a lui b.

$a \vdots b$ si $b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$

5. Daca un numar divide fiecare termen al unei sume, atunci el divide si suma: $\left.\begin{array}{l} a \vdots d \\ b \vdots d \\ c \vdots d \end{array}\right\} \Rightarrow (a + b + c) \vdots d$

6. Daca unul din factorii unui produs se divide cu un numar atunci produsul se divide cu acel numar. $a \vdots d \Rightarrow (a \cdot b \cdot c) \vdots d$ a,b,c,d fiind numere nenule.

7. Daca numarul natural a se divide cu numarul natural b si b se divide cu a, atunci a=b;

$$\left.\begin{array}{l} a \vdots b \\ b \vdots a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

Criterii de divizibilitate.

Fara a folosi impartirea exista metode pentru a arata daca un numar este divizibil sau nu cu altul.Aceste metode se numesc criterii de divizibilitate. Aceste criterii se refera la divizibilitatea cu 2,3,4,5,9,10,25, 10 si puteri ale lui 10. Mai exista criterii de divizibilitate pentru 7 si 11.

Criteriul de divizibilitate cu 10.

Daca ultima cifra a unui numar este 0 atunci numarul se divide cu 10.

Criteriul de divizibilitate cu 100 sau 1000(sau alte puteri ale lui 10).

Orice numarnatural se divide cu $10^n, n \in N^*$ *daca ultimele sale n cifre sunt 0.*

Criteriul de divizibilitate cu 5

Orice numar natural se divide cu 5 daca ultima cifra este 0 sau 5. $n \vdots 5 \Leftrightarrow u(n) \in \{0;5\}$

Criteriul de divizibilitate cu 2.

Daca ultima cifra a unui numar este para, atunci numarul se divide cu 2. $n \vdots 2 \Leftrightarrow u(n) \in \{0;2;4;6;8\}$

Criteriul de divizibilitate cu 3 respectiv 9.

Un numar natural este divizibil cu 3, respectiv 9, daca suma cifrelor sale este un multiplu de 3, respectiv 9.

$$\overline{abcd} \vdots 3 \Leftrightarrow (a+b+c+d) \vdots 3$$

$$\overline{abcd} \vdots 9 \Leftrightarrow (a+b+c+d) \vdots 9$$

Criteriul de divizibilitate cu 4.

Un numar natural este divizibil cu 4 daca ultimele sale doua cifre formeaza un numar multiplu de 4.

$$\overline{abcdef} \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{ef} \in M_4$$

Criteriul de divizibilitate cu 25.

Un numar natural este divizibil cu 25 daca ultimele doua cifre formeaza un numar multiplu de 25.

$$\overline{abcdef} \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{ef} \in M_{25} \Leftrightarrow \overline{ef} \in \{00;25;50;75\}$$

NUMERE PRIME. DESCOMPUNERE IN FACTORI PRIMI.

Se numeste numar ***prim*** orice numar diferit de 1 care are ca divizori numai pe 1 si pe el insusi.
O metoda de a afla numerele prime a fost data din antichitate de matematicianul grec Eratostene cunoscuta sub numele de “ciurul lui Eratostene”.
Exemple: 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,etc.
Se numeste numar ***compus*** numarul care are mai mult de doi divizori. Numarul compus se poate scrie ca un produs de numere prime.
Observatie. *Numerele 0 si 1 nu admit decat un divizor, deci nu nici primenici compuse.*
Singurul numar par prim este 2.

Numere prime intre ele:

Două numere se numesc **prime între ele** (sau relative prime)dacă cel mai mare diviyor comun al lor este 1

Descompunerea in factori primi.

Orice numar natural nenul care nu este prim poate fi scris sub forma unui produs de factori primi.
Sa luam de exemplu numarul
1134. In dreapta liniei verticale am trecut divizorii numere prime, iar in stanga, caturile obtinute la impartirile respective.

$$\begin{array}{r|l} 1134 & 2 \\ 567 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Atunci $1134 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

1200.

$$\begin{array}{r|l} 1200 & 2 \\ 600 & 2 \\ 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Atunci $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN

Cel mai mare divizor comun a doua numere a si b (sau mai multe) este ***cel mai mare*** numar care divide ambele numere.

Se noteaza cu : **c.m.m.d.c** sau $(a;b)$

Pentru a gasi cel mai mare divizor comun se decompun numerele in factori primi si se face ***produsul factorilor primi comuni, luati o singura data, la puterea cea mai mica.***

Exemplu.

$$\begin{cases} 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{cases} \Rightarrow c.m.m.d.c.(150;720) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$\begin{cases} 72 = 2^3 \cdot 3^2 \\ 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \end{cases} \Rightarrow c.m.m.d.c(72;42) = 2 \cdot 3 = 6$$

Numere prime intre ele

Se numesc numere prime intre ele , numerele naturale diferite de 0, care au cel mai mare divizor comun doar pe 1. c.m.m.d.c.=1

Exemplu numerele 9 si 8. Ele nu sunt numere prime dar intre ele sunt prime fiindca nu au ca divisor comun decat pe

$$(9;8) = 1$$

CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN

Cel mai mic multiplu comun a doua sau mai multe numere este cel ***mai mic numar*** natural diferit de 0 care se divide cu numerele date.Pentru a gasi cel mai mic multiplu comun a mai multor numere, se descompun numerele in factori primi si se face ***produsul factorilor primi comuni si necomuni luati o singura data, la puterea ccea mai mare*.** Se noteaza cu :

c.m.m.m.c(a;b) (daca avem doua numere) sau $[a;b]$

Exemplu.

$$\begin{cases} 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{cases} \Rightarrow [150;720] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600$$

$$\begin{cases} 72 = 2^3 \cdot 3^2 \\ 42 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{cases} \Rightarrow [72;42] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Observatie

1. Produsul a doua numere naturale este egal cu produsul dintre cel mai mare divizor comun si cel mai mic multiplu comun.

$$a \cdot b = (a;b) \cdot [a;b]$$