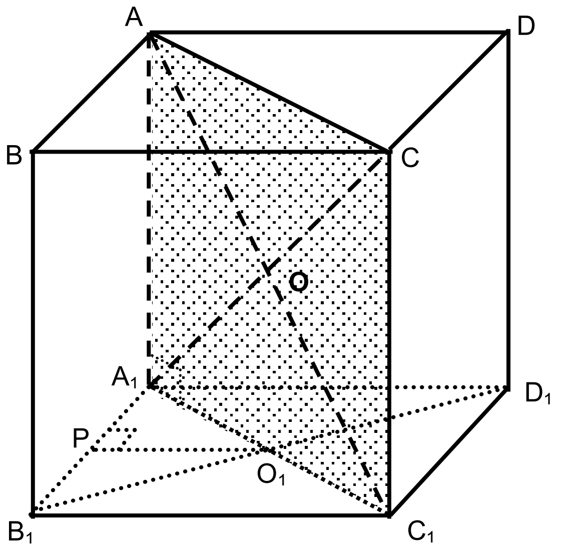
Cubul (hexaedrul regulat)

.1. Definiții, proprietăți și observații

Hexaedrul regulat (numit şi cub) este poliedrul cu şase fețe pătrate congruente. Cubul face parte din familia prisme – subfamilia paralelipipede, dar este inclus şi în grupa Solidelor Platon.

Elementele cubului sunt: vârfurile, muchiile şi fețele.
Cubul are 6 fețe, 12 muchii, 8 vârfuri; fețele sunt pătrate, iar vârfurile sunt tridreptunghice (trei unghiuri drepte au vârful comun şi două câte două laturile comune). În D 3 cubul este echivalentul pătratului din D 2.



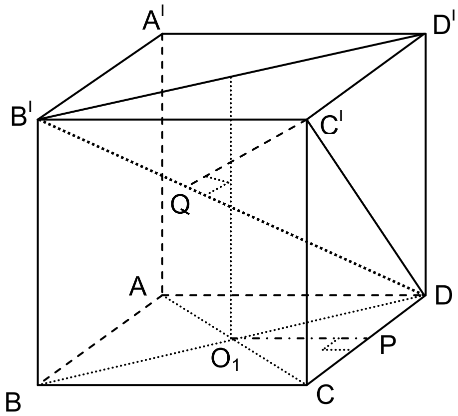
Cubul $(ABCDA_1B_1C_1D_1)$ din figura alăturată are: cele 8 vârfuri: A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1; muchiile bazelor: AB, BC, CD, AD, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1; muchiile laterale: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1; bazele acestui cub: (ABCD) şi $(A_1B_1C_1D_1)$; fețele laterale: (A_1ABB_1), (B_1BCC_1), (C_1CDD_1), (D_1DAA_1); diagonalele bazelor: AC, BD, A_1C_1, B_1D_1; diagonalele cubului: A_1C, B_1D, C_1A, D_1B; cele patru diagonale sunt concurente în acelaşi punct numit centrul cubului: notat cu O.

Poliedrele - Solide Platon îşi păstrează toate proprietățile indiferent care dintre fețe este aleasă a fi bază.

Alte elemente: *secțiunile diagonale* sunt: (A_1ACC_1), (B_1BDD_1) – pentru această „aşezare" a cubului; în total, într-un cub sunt şase secțiuni determinate de intersecția cubului cu planele care trec prin câte două diagonale paralele din fețe opuse; *apotema bazei*: OP; *diagonala bazei* este un segment congruent cu diagonala oricărei fețe, iar într-un cub sunt 12 diagonale de acest fel; *vârfurile opuse în* cub sunt două vârfuri care nu aparțin aceleiaşi fețe; segmentul ce uneşte două vârfuri opuse în cub se numeşte *diagonala cubului*; un cub are patru diagonale: punctul lor de intersecție se numeşte *centrul cubului*.
Punctul de intersecție al diagonalelor unei fețe este *centrul de greutate al acelei fețe*; se numeşte *înălțime* în cub segmentul care uneşte centrele de greutate ale bazelor. Cum oricare două fețe opuse pot deveni baze, putem construi unui cub trei asemenea segmente, de obicei este considerată înălțime o muchie a cubului. Segmentul ce uneşte centrul unei fețe cu o latură a acelei fețe şi este perpendicular pe ea se numeşte *apotema bazei*.

2. Calculul unor elemente ale cubului

a) *Apotema bazei* are lungimea cât jumătate din lungimea muchiei cubului.



În $\Delta ABC : \begin{cases} AB = BC = \ell \\ m(\angle B) = 90^0 \\ AC^2 = AB^2 + BC^2 \end{cases} \Rightarrow AC = \ell\sqrt{2}$.

În $\Delta O_1CP : \begin{cases} m(\angle O_1CP) = 45^0 \\ CP = \dfrac{\ell}{2} \\ m(\angle P) = 90^0 \end{cases} \Rightarrow O_1P = \dfrac{\ell}{2}$.

AC = diagonala bazei; O_1P = apotema bazei.

b) *Diagonala cubului*: $d_c = \ell\sqrt{3}$

În $\Delta B'BD : \begin{cases} BB' = \ell \\ m(\angle B'BD) = 90^0 \\ BD = \ell\sqrt{2} \\ B'D^2 = BB'^2 + BD^2 \end{cases} \Rightarrow B'D^2 = \ell^2 + (\ell\sqrt{2})^2 \Rightarrow B'D = \ell\sqrt{3}$.

c) *Aria bazei, aria laterală, aria totală şi volumul cubului*

Fețele cubului sun pătrate, deci: $A_b = \ell^2$, $A_\ell = 4 \cdot \ell^2$ şi $A_t = 6 \cdot \ell^2$.

Cubul este o prismă; putem calcula volumul folosind formula: $V_{prisma} = A_b \cdot h$;

Din: $\begin{cases} A_b = \ell^2 \\ h_{cub} = \ell \\ V_c = A_b \cdot h \end{cases} \Rightarrow V_c = \ell^2 \cdot \ell \Rightarrow V_c = \ell^3$.

d) *Distanța de la un vârf al cubului la o diagonală a cubului*: lungimea $C'Q$.

În $\Delta B'C'D : \begin{cases} B'C' = \ell \\ m(\angle B'C'D) = 90^0 \\ C'D = \ell\sqrt{2} \\ B'D = \ell\sqrt{3} \\ QC' \cdot B'D = B'C' \cdot C'D \end{cases} \Rightarrow QC' = \dfrac{\ell \cdot \ell\sqrt{2}}{\ell\sqrt{3}} \Rightarrow QC' = \dfrac{\ell\sqrt{6}}{3}$.

3. Echivalența unor elemente în cub

Notăm cu: ℓ = muchia cubului ; a_b = apotema bazei ; d_c = diagonala cubului ; A_b = aria bazei ; A_ℓ = aria laterală ; A_t = aria totală ; V_c = volumul cubului .

Cubul	ℓ	a_b	d_c	A_b	A_ℓ	A_t
ℓ	ℓ	$2 \cdot a_b$	$\frac{d \cdot \sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{A_b}$	$\frac{\sqrt{A_\ell}}{2}$	$\sqrt{\frac{A_t}{6}}$
a_b	$\frac{\ell}{2}$	a_b	$\frac{d \cdot \sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{A_b}}{2}$	$\frac{\sqrt{A_\ell}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{A_t}}{12}$
d_c	$\ell\sqrt{3}$	$2\sqrt{3} \cdot a$	d_c	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{A_b}$	$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{A_\ell}}{2}$	$\frac{\sqrt{A_t}}{\sqrt{2}}$
A_b	ℓ^2	$4 \cdot a^2$	$\frac{d_c^2}{3}$	A_b	$\frac{A_\ell}{4}$	$\frac{A_t}{6}$
A_ℓ	$4 \cdot \ell^2$	$16 \cdot a^2$	$\frac{4}{3} \cdot d^2$	$4 \cdot A_b$	A_ℓ	$\frac{2}{3} \cdot A_t$
A_t	$6 \cdot \ell^2$	$24 \cdot a^2$	$2 \cdot d_c^2$	$6 \cdot A_b$	$\frac{3}{2} \cdot A_\ell$	A_t
V	ℓ^3	$8 \cdot a^3$	$\frac{d^3 \cdot \sqrt{3}}{9}$	$A_b \cdot \sqrt{A_b}$	$\frac{A_\ell \cdot \sqrt{A_\ell}}{8}$	$\frac{A_t \cdot \sqrt{A_t}}{6\sqrt{6}}$

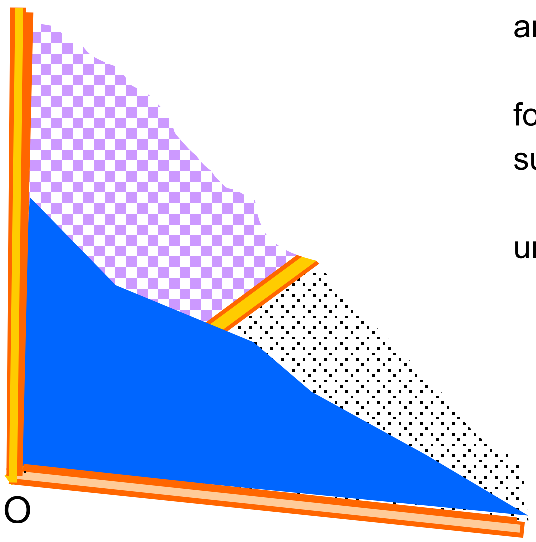
4. Scurt istoric pentru cub

Tot în dialogul „Timaios“ se află o descriere plastică a cubului .

Mai întâi este definit triunghiul dreptunghic isoscel: „ dintre aceste triunghiuri , unul are , de fiecare parte , jumătate dintr-un unghi drept , a cărui împărțire este determinată de laturi egale“ şi „ patru asemenea triunghiuri ale căror ale căror unghiuri drepte se întâlnesc în centru şi formează un singur pătrat echilateral“ . Urmează definiția cubului: „ Şase asemenea pătrate unite între ele dau naştere la opt unghiuri în spațiu , fiecare fiind constituit din câte trei unghiuri plane . Iar figura astfel obținută este cubică , ea având drept baze şase pătrate plane echilaterale“ .

„Să conferim pământului figura cubică . Căci , dintre cele patru genuri , pământul este cel mai greu de mişcat şi , dintre corpuri , cel mai uşor de modelat . “

5. Unghi triedru în cub



Unghiul în spațiu sau unghiul poliedru are un vârf şi , cel puțin trei fețe.

Unghiurile plane care participă la formarea unui unghi poliedral regulat sunt congruente.

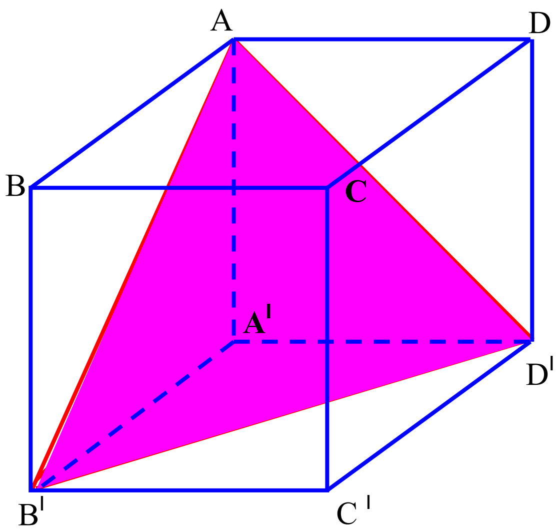
În vârful unui cub se întâlnesc trei unghiuri plane drepte .

Cubul are 8 astfel de unghiuri spațiale.

Platon, când asociază elementelor primordiale corpuri geometrice regulate , justifică de ce pământul (element de mare stabilitate) este asociat cubului:

„ Să conferim pământului figura cubică. Căci , dintre cele patru genuri, pământul este cel mai greu de mişcat şi, dintre corpuri cel mai uşor de modelat. Cea mai potrivită este deci figura ce are bazele cele mai stabile“
„ ... pătratul constituie în mod necesar o bază mai stabilă decât triunghiul, atât parte de parte (sunt indicate aici cele patru triunghiuri dreptunghice isoscele care compun un pătrat) cât şi în întregul lui“.

6. Cubul şi tetraedrul



Dacă notăm cu ℓ latura cubului. Muchiile tetraedrului sunt diagonale în fețele cubului.

Din: $AB' = \ell\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_{tetra} = \frac{(\ell\sqrt{2})^3 \cdot \sqrt{3}}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{tetra} = \frac{\ell^3 \cdot \sqrt{6}}{6}.$$

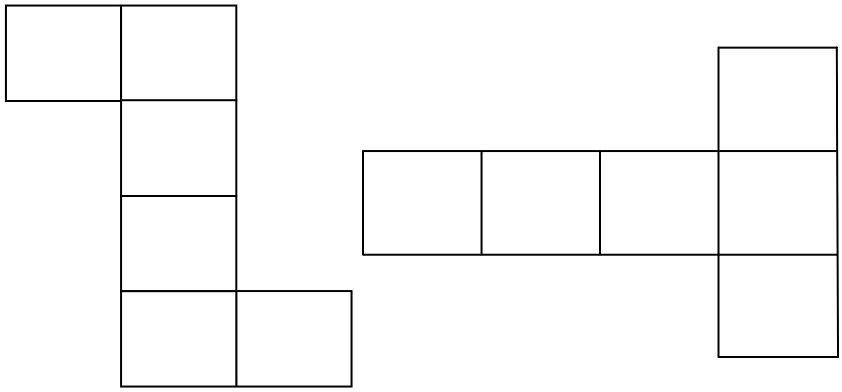
„„Opusul“ tetraedrului ($CB'AD'$) este tetraedrul ($A'BC'D$).

7. *Desfăşurarea cubului*

Desfăşurarea unui corp este operația prin care fețele laterale se întind în mărime naturală pe o suprafață plană , unele lângă altele , ariile (laterală sau totală) apar ca ariile unor poligoane . Rezultatul operației numită desfăşurare (figura geometrică plană obținută) se numeşte desfăşurata acelui corp .

Putem obține mai multe desfăşurate ale aceluiaşi cub .

Desfăşurata unui cub este formată din şase pătrate congruente .

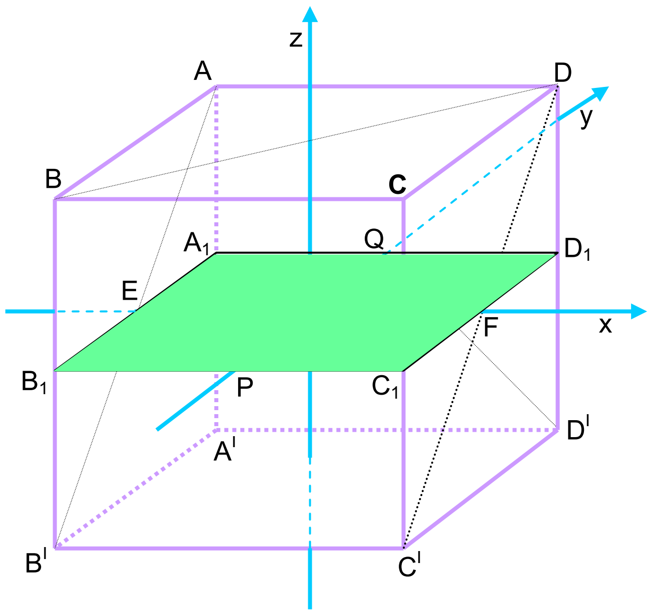


Două „poziții“ care exprimă desfăşurarea aceluiaşi cub.

8. *Coordonatele vârfurilor cubului*

a) Dacă centrul cubului coincide cu originea sistemului de coordonate şi latura cubului este ℓ , atunci:

$A_1Q = QD_1 = FD_1 = FC_1 = B_1P = PC_1 = A_1E = EB_1 = \frac{\ell}{2} = b|$.



$A(- \ ; + \ ; + \ )$;

$B(- \ ; - \ ; + \ )$;

$C(+ \ ; - \ ; + \ )$;

$D(+ \ ; + \ ; + \ )$;

$A_1(- \ ; + \ ; - \ )$;

$B_1(- \ ; - \ ; - \ )$;

$C_1(+ \ ; - \ ; - \ )$;

$D_1(- \ ; + \ ; - \ )$.

$O(0 ; 0 ; 0)$

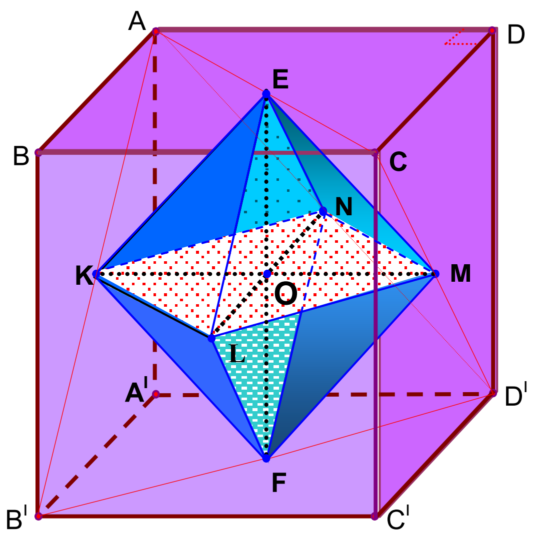
9. Dualitatea cub – octaedru

Octaèdru (din grecescul : *oktô* = opt şi *hedra* = faţă) este poliedrul cu opt feţe care sunt triunghiuri , douăsprezece muchii şi şase vârfuri .

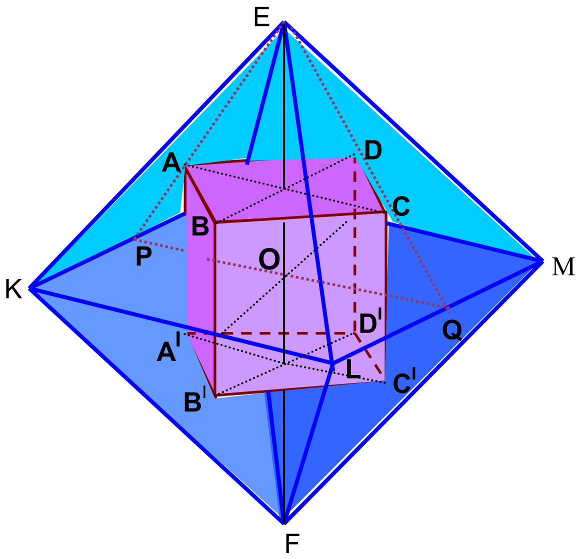
Octaèdru régulat este un Solid Platon unde feţele sunt opt triunghiuri echilaterale; fiecare unghi poliedru al octaedrului este determinat de patru astfel de triunghiuri .

Propoziţia nr 1: Centrele feţelor unui cub determină un octaedru regulat ; volumul octaedrului reprezintă a şasea parte din volumul cubului .

Propoziţia nr 2: Centrele feţelor unui octaedru determină un cub ; raportul dintre volumul cubului şi volumul octaedrului este: $\frac{V_C}{V_O} = \frac{2}{9}$.



Figură pentru P_1



Figură pentru P_2

Demonstraţie la propoziţia nr 1: Notăm cu ℓ - latura cubului .

1^0 În $\Delta\ B'C: \begin{cases} AE = EC \\ AK = KB' \end{cases} \Rightarrow EK = \frac{B'C}{2}$; 2^0 În $\Delta\ B'D': \begin{cases} AK = KB' \\ AN = ND' \end{cases} \Rightarrow KN = \frac{B'D'}{2}$.

Deci: EK = EL = EM = … = FM = FN = $\frac{\ell_c\sqrt{2}}{2}$. Dar: KM = LN şi KM $\perp$ LN .

Poliedrul (EKLMNF) – cu feţele triunghiuri echilaterale şi secţiunea (KLMN) un pătrat este octaedru . $A_{(KLMN)} = \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{2}$.

$$3^0 \text{ Din: } \begin{cases} A_{(KLMN)} = \frac{\ell^2}{2};\ EO = \frac{\ell}{2} \\ V_{(EKLMN)} = \frac{A_{(KLMN)} \cdot EO}{3} \end{cases} \Rightarrow V_{(EKLMN)} = \frac{\frac{\ell^2}{2} \cdot \frac{\ell}{2}}{3} \Rightarrow V_{octa.} = \frac{\ell_c^3}{6} .$$

Demonstrație la propoziția nr 2:

Notăm cu λ - latura octaedrului: $EK = EM = ML = EL = \ldots = MF = \lambda$.

1^0 $EM = \lambda$, $QM = \frac{\lambda}{2}$, $m(\angle\ ) = 90^0$, rezultă că $EQ = \frac{\lambda\sqrt{3}}{2}$; dar: $\frac{EC}{EQ} = \frac{2}{3}$,

deci: $\frac{EC}{\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow EC = \frac{\lambda\sqrt{3}}{3} = EA = EB = ED = FA^I = FB^I = FC^I = FD^I$.

2^0 Din $AC \parallel PQ \Rightarrow \Delta\ AC \sim \Delta\ PQ \Rightarrow \frac{EC}{EQ} = \frac{AC}{PQ}$, unde: $EQ = \frac{\lambda\sqrt{3}}{2}$,

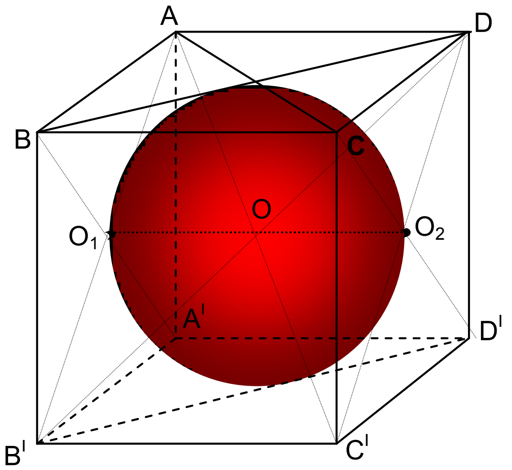
$EC = \frac{\lambda\sqrt{3}}{3}$, $PQ = KL = \lambda \Rightarrow \frac{\frac{\lambda\sqrt{3}}{3}}{\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}} = \frac{AC}{\lambda} \Rightarrow AC = \frac{2\lambda}{3} \Rightarrow AB = \frac{\lambda\sqrt{2}}{3} = AA^I = BC$.

3^0 Din: $V_c = \left(\frac{\lambda\sqrt{2}}{3}\right)^3$ şi $V_O = \frac{\lambda\cdot\sqrt{2}}{3}$ rezultă: $\frac{V_C}{V_O} = \frac{2}{9}$.

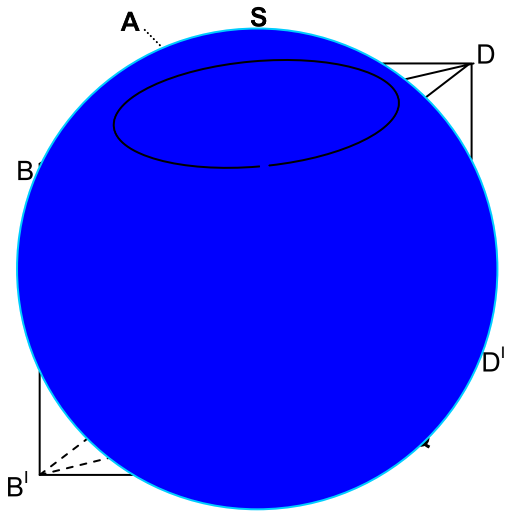
10. *Cubul şi sfera*

Sfera înscrisă este tangentă centrelor fețelor cubului şi există şase puncte de tangență, iar centrul cubului coincide cu centrul sferei.

$R_s = \frac{\ell_c}{2} =$. $OO_1 = OO_2$, dar $O_1O_2 = BC = \ell_c$.



Sfera înscrisă



Intersfera

Intersfera este sfera tangentă muchiilor în mijlocul lor; deci există 12 puncte de tangență. Diametrul intersferei are lungimea cât o diagonală feței. Segmentul PQ - de exemplu - este diametrul sferei şi $PQ = AD' = \ell_c\sqrt{2}$.

O parte din sferă devine internă corpului, iar alte şase părți devin externe tetraedrului şi sunt calote sferice identice.

Deci: $R_{intersferă} = \rho = \dfrac{\ell_c\sqrt{2}}{2} = OS$. $R_{calotă} = O_1M$ şi $H_{calotă} = O_1S$.

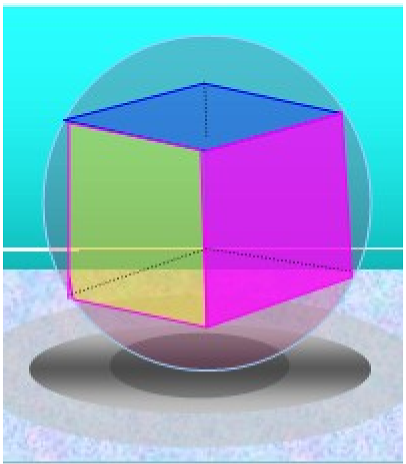
$$\text{În } \Delta OO_1M: \begin{cases} OM = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2} \\ O_1M = \dfrac{\ell}{2} \\ m(\angle OO_1M) = 90^0 \\ O_1O^2 = OM^2 - O_1M^2 \end{cases} \Rightarrow O_1O^2 = \left(\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow O_1O = \dfrac{\ell}{2}.$$

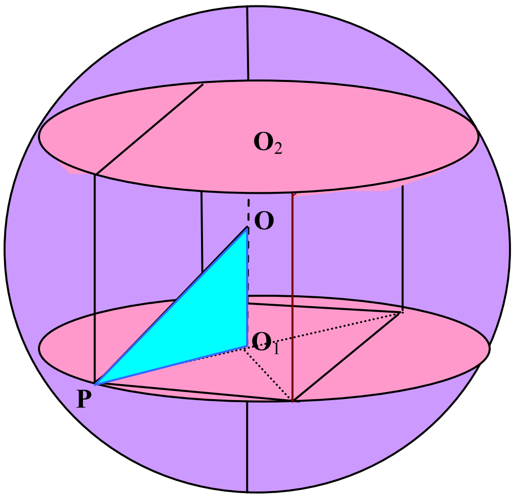
Pentru calota sferică: $O_1M = R_{c.s.} = \dfrac{\ell}{2}$; $O_1S = H_{c.s.} = \dfrac{\ell}{2}$.

$$\text{Din: } \begin{cases} \dfrac{\ell_c}{2} = r \\ \rho = \dfrac{\ell_c\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_c = 2\cdot r \\ \ell_c = \rho\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 2\cdot r = \rho\sqrt{2}$$
- o relație de legătură dintre raza sferei înscrise şi raza intersferei.

Sfera circumscrisă include pe suprafața ei toate vârfurile cubului; centrul cubului coincide cu centrul sferei şi este centrul de simetrie al întregului ansamblu.

Proprietate: Vârfurile unei secțiuni diagonale a cubului se află pe acelaşi cerc mare al sferei (evident, cu raza cât a sferei), iar vârfurile aceleiaşi fețe a cubului se află pe un cerc mic cu raza de lungime cât jumătate din lungimea unei diagonale a bzei.





Demonstrație:

$$1^0 \text{ În } \Delta\ O O_1 P: \begin{cases} OO_1 = \dfrac{\ell_c}{2} \\ O_1P = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2} \\ OP = R_s = R \\ OP^2 = O_1O^2 + O_1P^2 \end{cases} \Rightarrow R^2 = \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{\ell^2}{4} + \frac{2\ell^2}{4} \Rightarrow R = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_{\text{cubului inscris in sfera}} = \frac{2\cdot R}{\sqrt{3}} \Rightarrow R_{\text{sferei}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\ell}{2}.$$

Prof. Rotaru Grigore